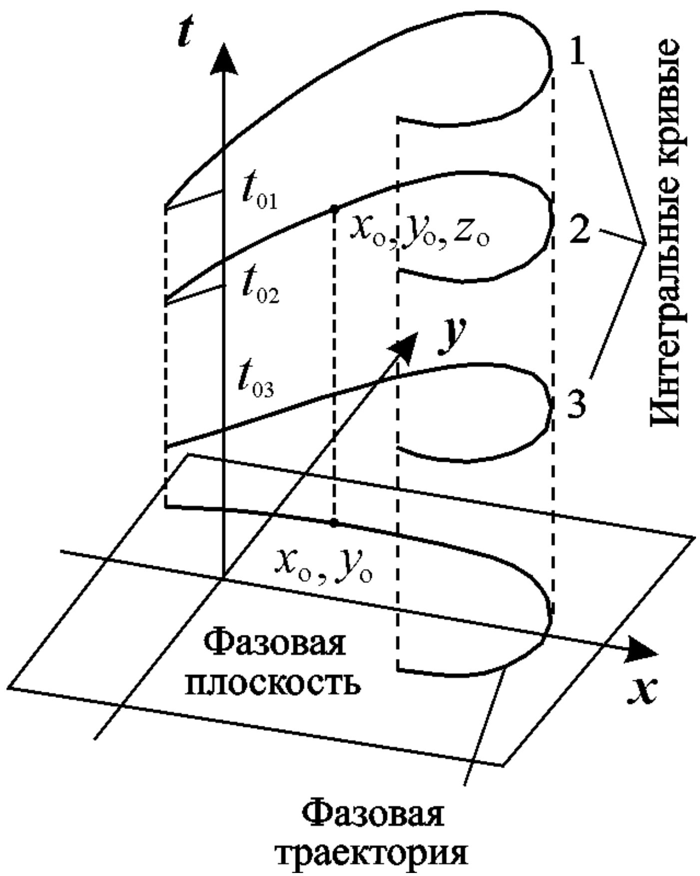
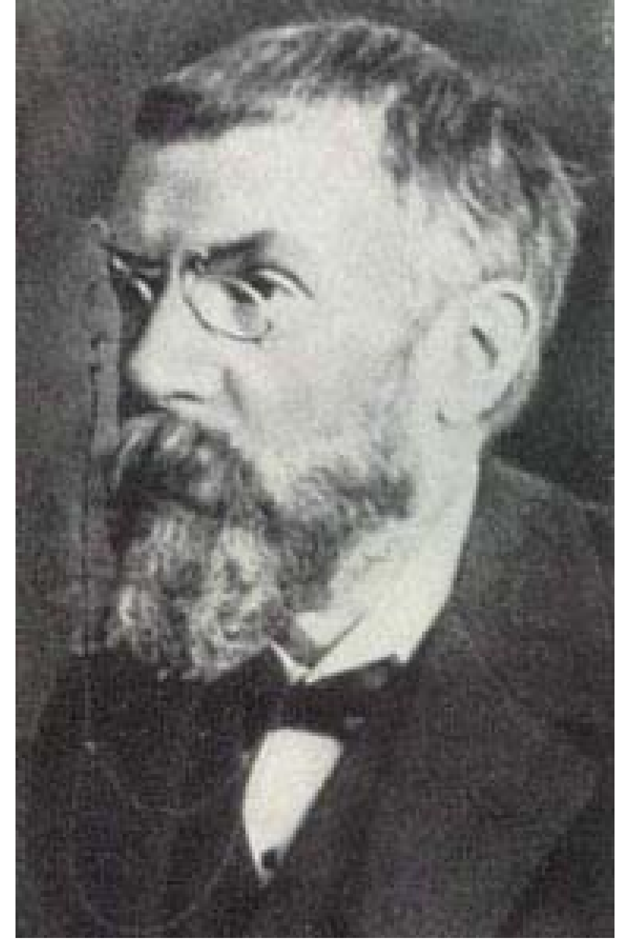
Фазовая плоскость

Качественное исследование

Анализ устойчивости стационарного состояния системы двух автономных дифференциальных уравнений

Траектории системы в пространстве (x,y,t)

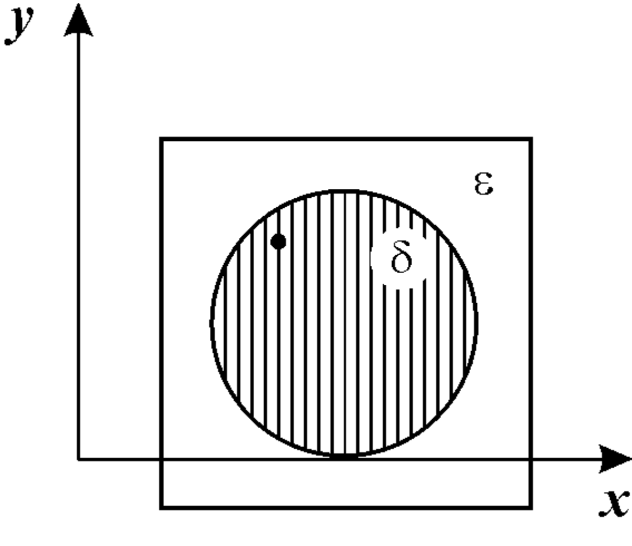




Жюль Анри Пуанкаре́
(Jules Henri Poincaré)
1854-1912)

Определение устойчивости

- *Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ, никогда не достигнет границы ε.*



Типы устойчивости стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Ляпуно́в Алекса́ндр Миха́йлович (1857 – 1918) – выдающийся русский математик, создал теорию устойчивости состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Работал также в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей

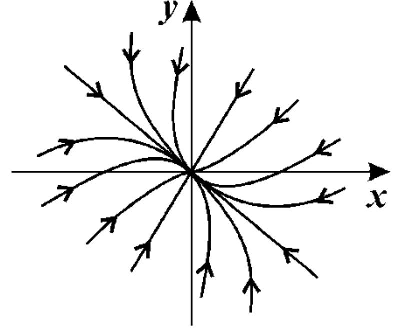
Типы поведения фазовых траекторий в окрестности стационарного состояния для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

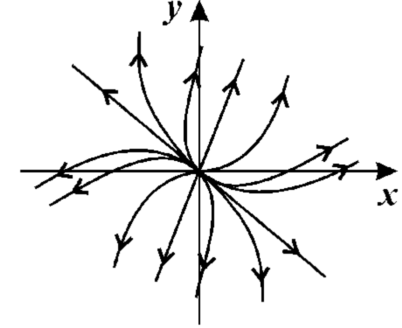
$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

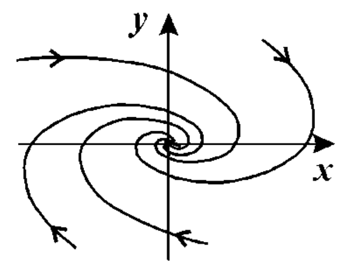
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$



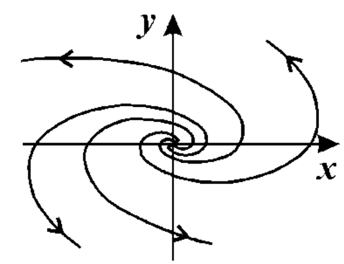
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



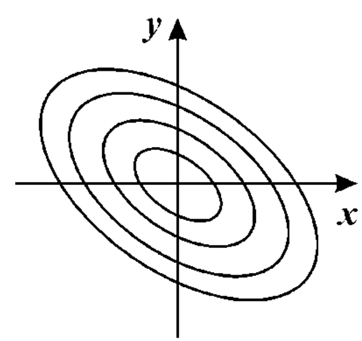
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



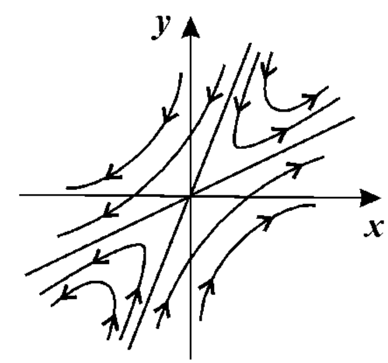
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)



Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Если *оба корня* имеют ***отрицательную*** *действительную* часть и, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то *состояние равновесия* ***устойчиво;***

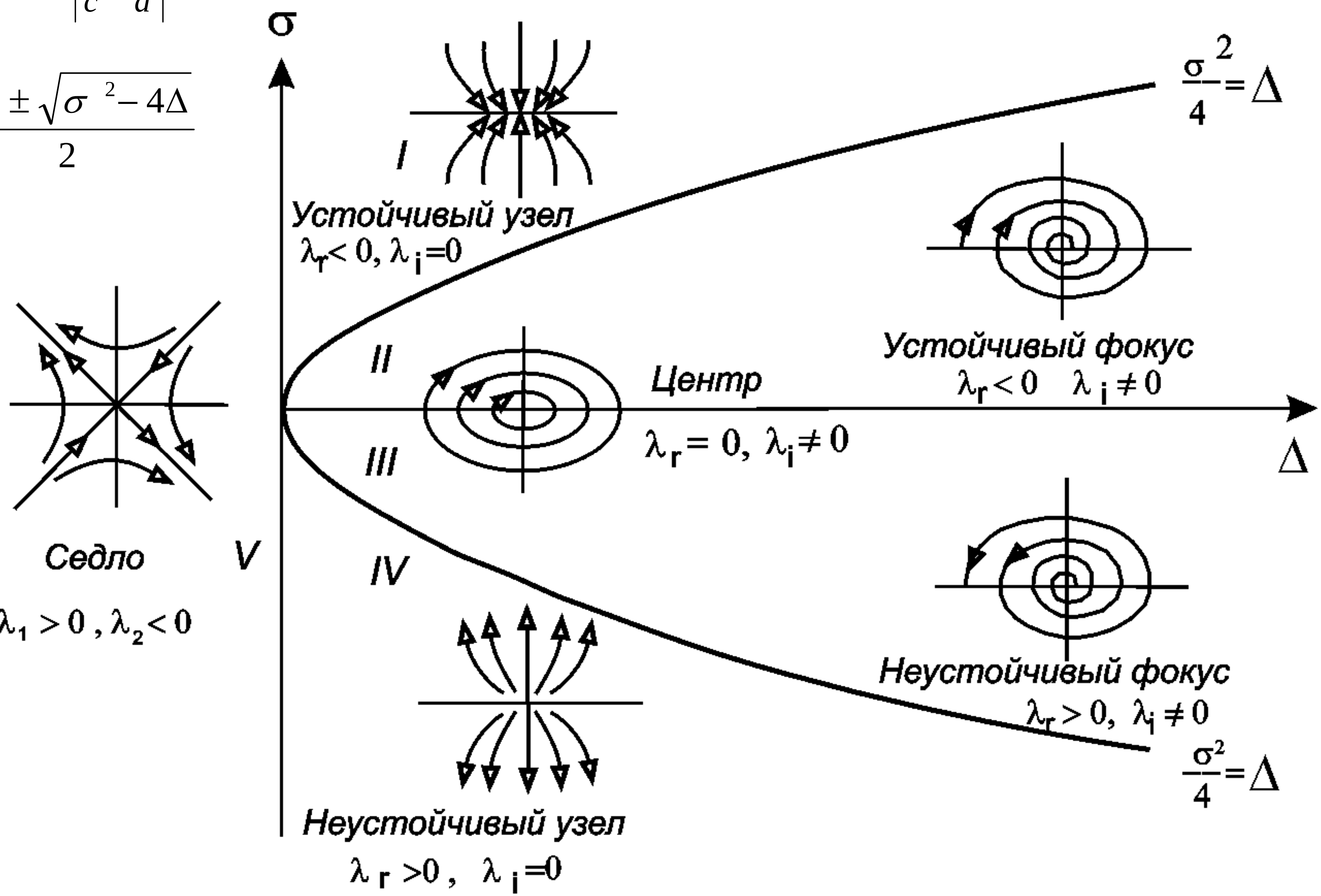
- если *хотя бы один корень* имеет ***положительную*** *действительную часть*, то есть линеаризованная система имеет нарастающие решения, то *состояние равновесия* ***неустойчиво****.*

- Если *действительные части обоих корней* характеристического уравнения *равны нулю* или если *один корень равен нулю*, *а другой отрицателен*, то *уравнения* (5.8) *не дают ответа* на вопрос об *устойчивости состояния равновесия*, и необходимо *рассматривать члены более высокого порядка малости в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений* (5.6).

Бифуркацонная диаграмма

$$\sigma = -(a+d);\ \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad x = \overline{x} + \xi,$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y). \qquad y = \overline{y} + \eta.$$

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \qquad a = P_x{}'(\overline{x}, \overline{y}), b = P_y{}'(\overline{x}, \overline{y}),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta. \qquad c = Q_x{}'(\overline{x}, \overline{y}), d = Q_y{}'(\overline{x}, \overline{y}).$$

Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. Elements of Physical Biology, 1925)

$$k_0 \qquad k_1 \leftarrow \quad k_2$$

$$\longrightarrow \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{B}$$

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$

$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$

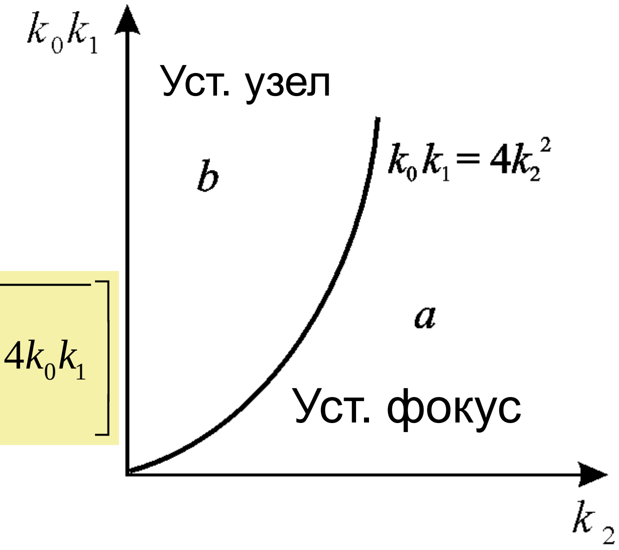
Лотка Альфред Джеймс (англ. *Alfred James Lotka*), 1880 –1949 – американский математик, физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

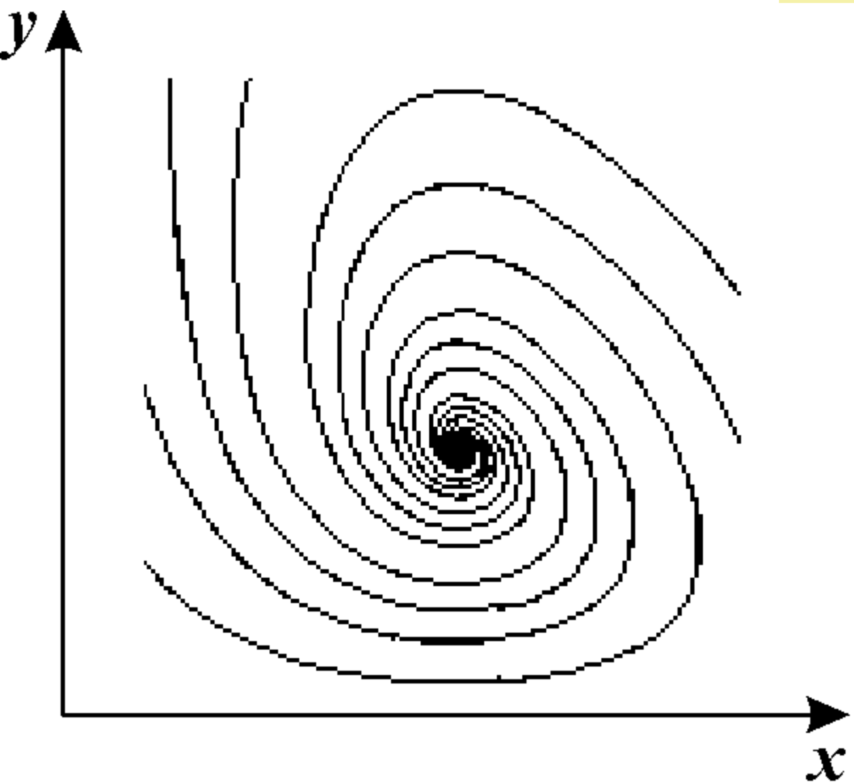
Фазовый портрет системы Лотки
а – устойчивый фокус,

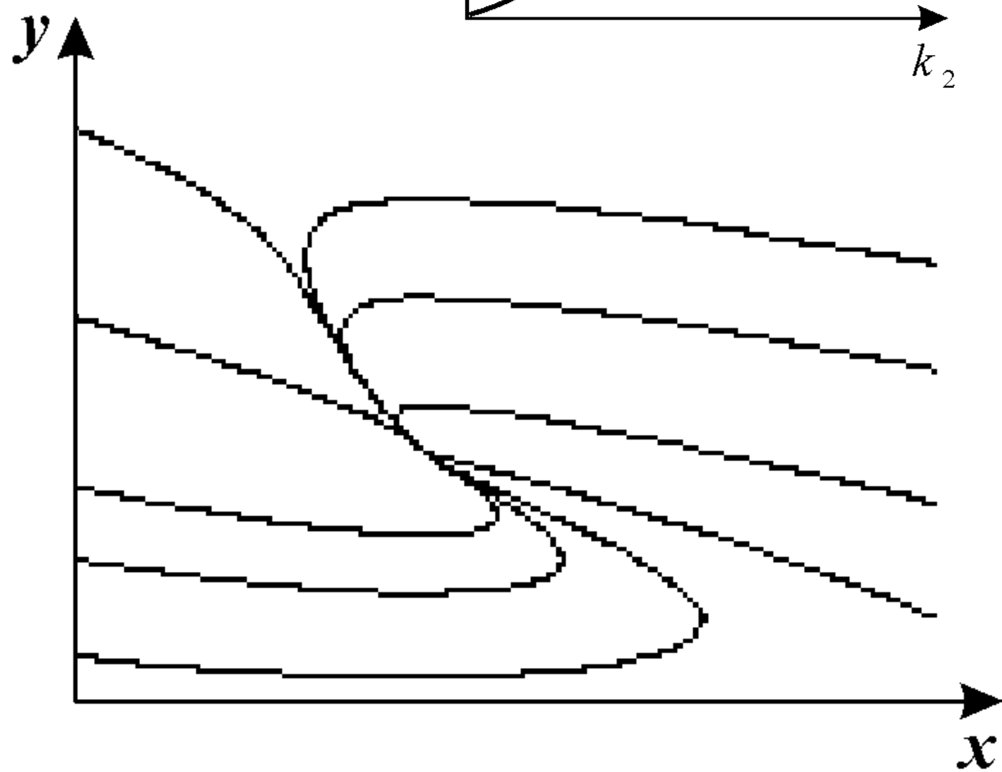
б – устойчивый узел.

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y.$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{k_1 k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 - 4k_0 k_1}\right]$$







а

$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$

б

$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$