Г.Ю.Ризниченко

Исследование одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Основные понятия (автономность)

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t).$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение
1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Автономное уравнение.
Правая часть не зависит явно от t

Переменные и параметры

$$\frac{dx}{dt} = ax + bxy + dx\sin wt$$

x, t – переменные

a,b,d,w - параметры

Стационарное состояние

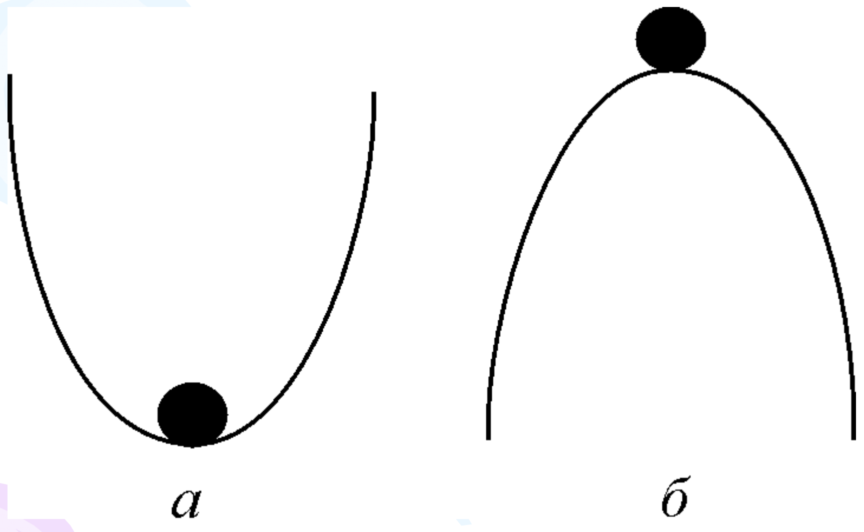
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\bar{x}} = 0$$

Скорость изменения переменной x равна нулю

$$f(\bar{x}) = 0$$

Правая часть уравнения равна нулю

Устойчивость стационарного состояния



Стационарное состояние устойчиво, если малые отклонения с течением времени остаются малыми

Метод Ляпунова исследования устойчивости стационарного состояния

Метод линеаризации функции в окрестности стационарного состояния

Выразим переменную *x* через отклонение от стационарного значения:

$$x = \bar{x} + \xi$$

$$\frac{d(\bar{x} + \xi)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(\bar{x} + \xi)$$

Правую часть разложим в ряд

Тейлора в точке $\overline{x}$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})\xi + \frac{1}{2} f''(\overline{x})\xi^2 + \ldots$$

Брук Тэйлор (1685-1731)

- Английский

математик, музыкант, живописец, философ.

Формула Тэйлора

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}\left(a\right)}{n!}\left(x-a\right)^{n}$$

Значение функции $f(x)$ в точке x в окрестности точки a выражается в виде степенного ряда

Отбросим члены более высокого порядка. Получим линеаризованное уравнение:

$$d\xi / dt = a_1 \xi,$$

Решение линеаризованного уравнения

$$\xi(t) = c \cdot \exp(\lambda t)$$

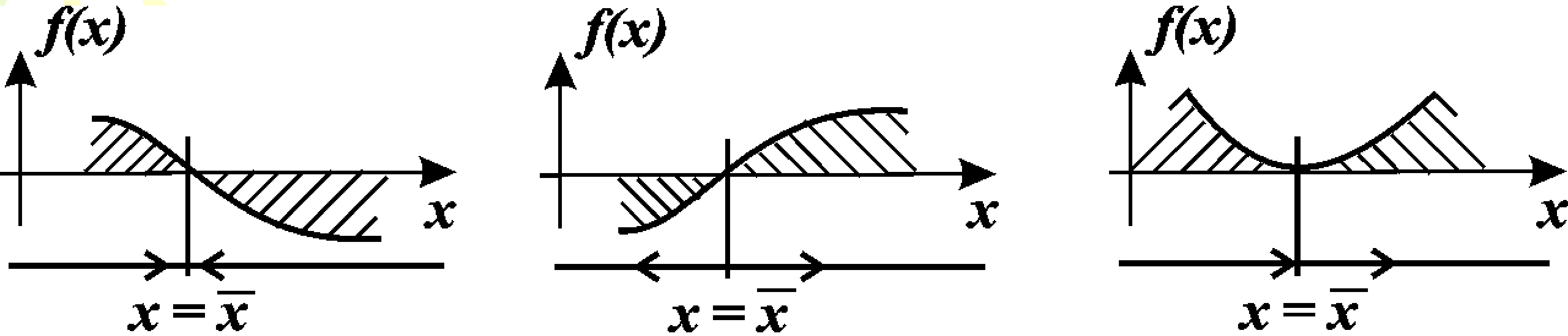
$$\lambda = a_1 = f'(\bar{x})$$

C – произвольная постоянная. C=ξ(0)

Метод Ляпунова

Устойчивость стационарного состояния уравнения dx/dt=f(x) $\bar{x}$ *определяется знаком производной правой части в стационарной точке. Если эта производная равна нулю, требуется рассмотрение в разложении f (x) членов более высокого порядка*

Графический метод анализа устойчивости стационарного состояния



а *б* *в*

устойчиво неустойчиво неустойчиво

Типы аттракторов

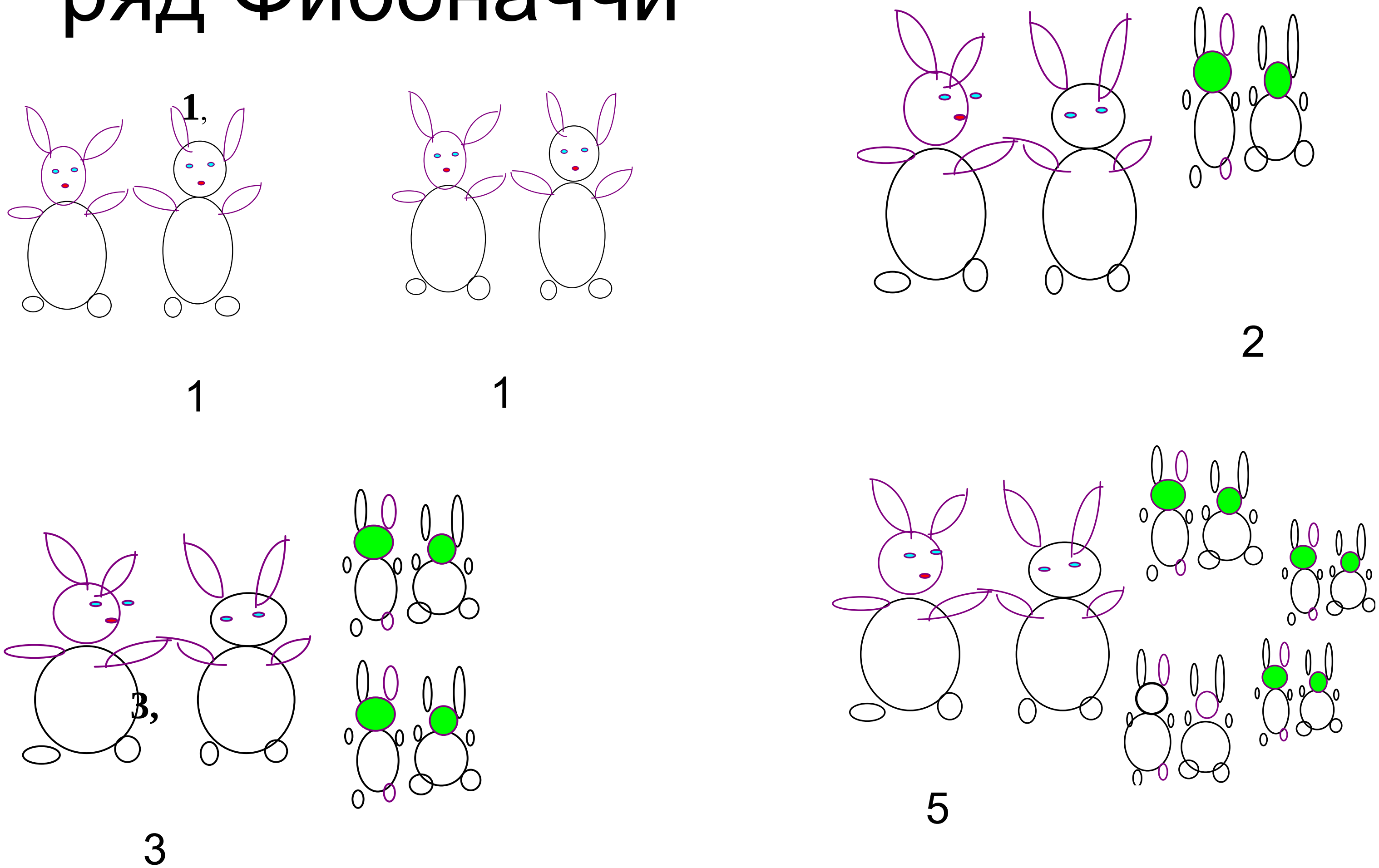
- *Устойчивая точка покоя*
- *Предельный цикл — режим колебаний с постоянными периодом и амплитудой (начиная с размерности системы 2)*
- *Области с квазистохастическим поведением траекторий в области аттрактора, например, «странный аттрактор» (начиная с размерности 3).*

Г.Ю.Ризниченко

Модели популяционной динамики

- Непрерывные модели: экспоненциальный рост, логистический рост, модели с наименьшей критической численностью.
- Модели с неперекрывающимися поколениями. Дискретное логистическое уравнение.
- Диаграмма и лестница Ламерея.
- Типы решений при разных значениях параметра: монотонные и затухающие решения, циклы, квазистохастическое поведение, вспышки численности.
- Матричные модели популяций. Влияние запаздывания.

Популяционная динамика
ряд Фибоначчи



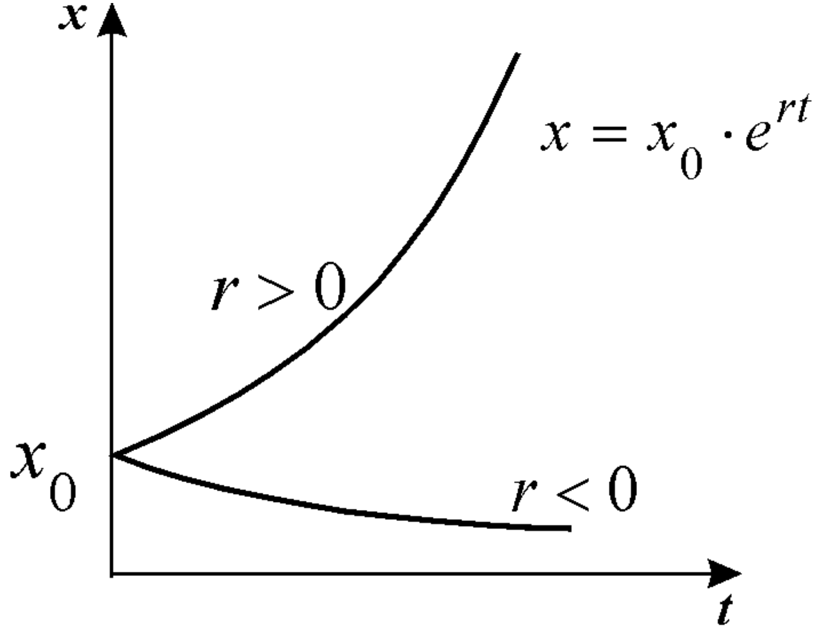
Леонардо из Пизы («Трактат о счете», 13 век)

Непрерывные модели роста популяций

Модель экспоненциального роста Мальтуса («О росте народонаселения» 1798)

$$N_{t+1} = qN_t \qquad N_{t+1} = q^n N_0$$

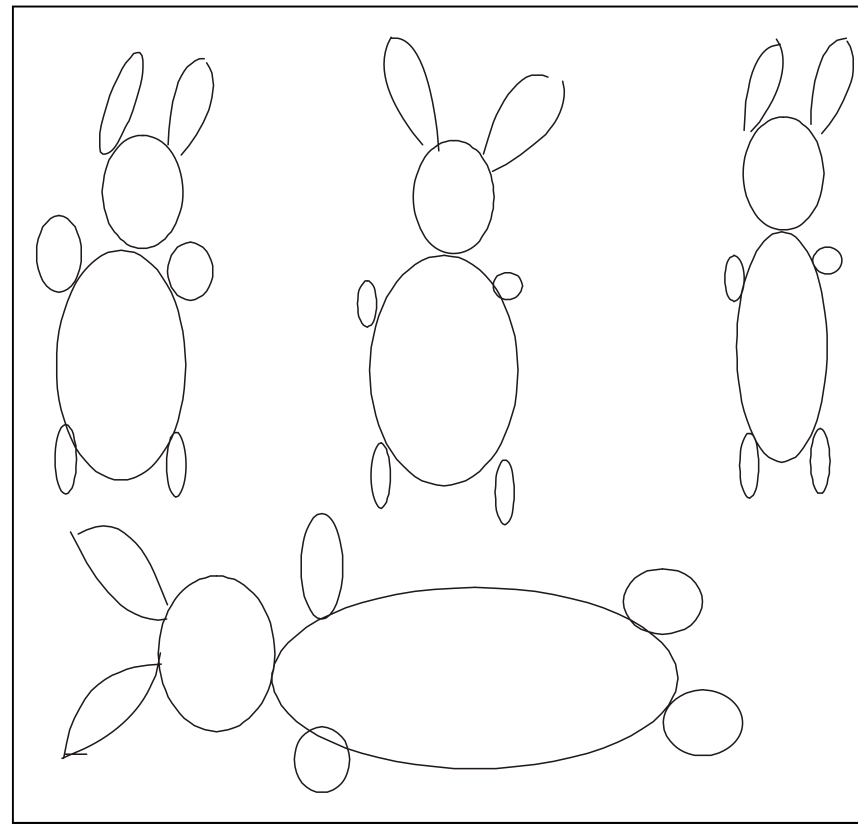
$$\frac{dx}{dt} = rx\,.$$



Уравнение логистического роста (Ферхюльст, 1845)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

r – константа скорости роста
K – емкость экологической ниши



K – системный фактор

Уравнение Ферхюльста

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$x(t) = \frac{x_0 K e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{rt}}$$

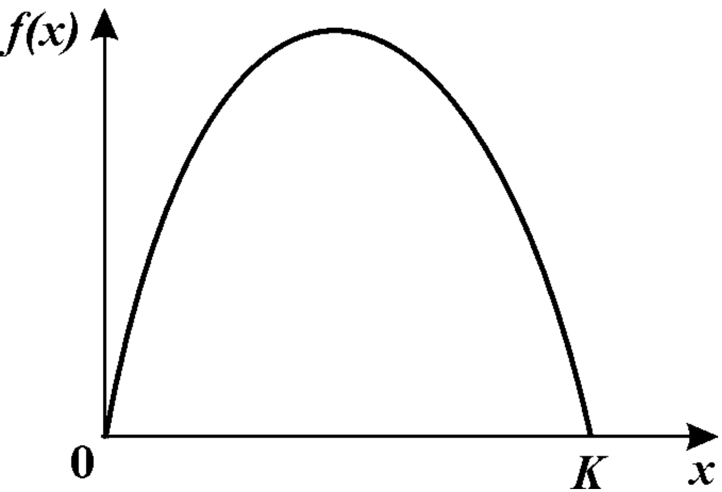
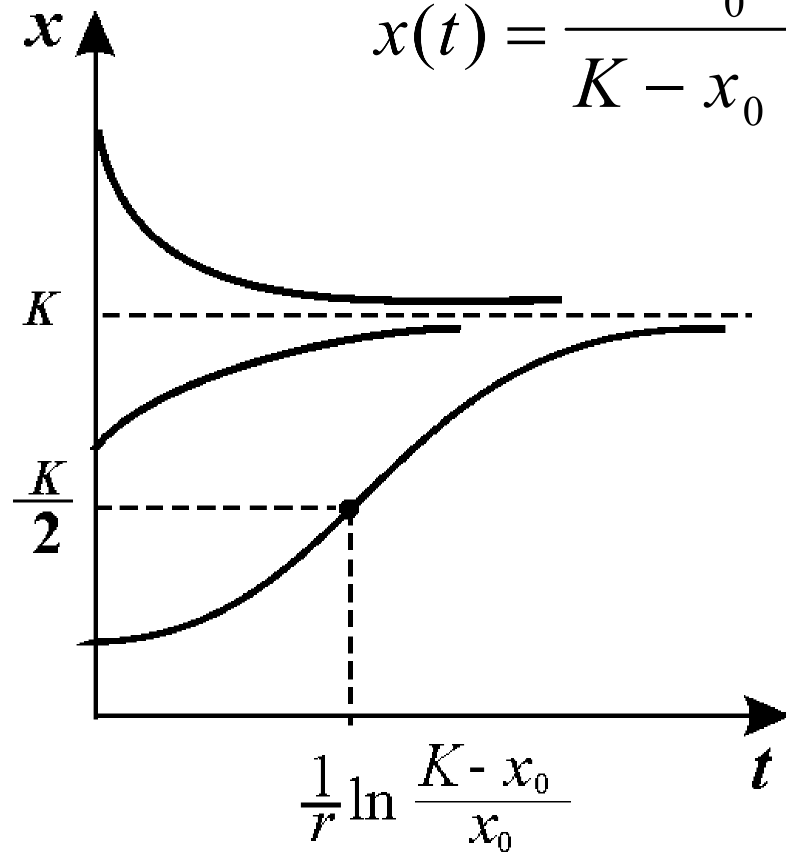


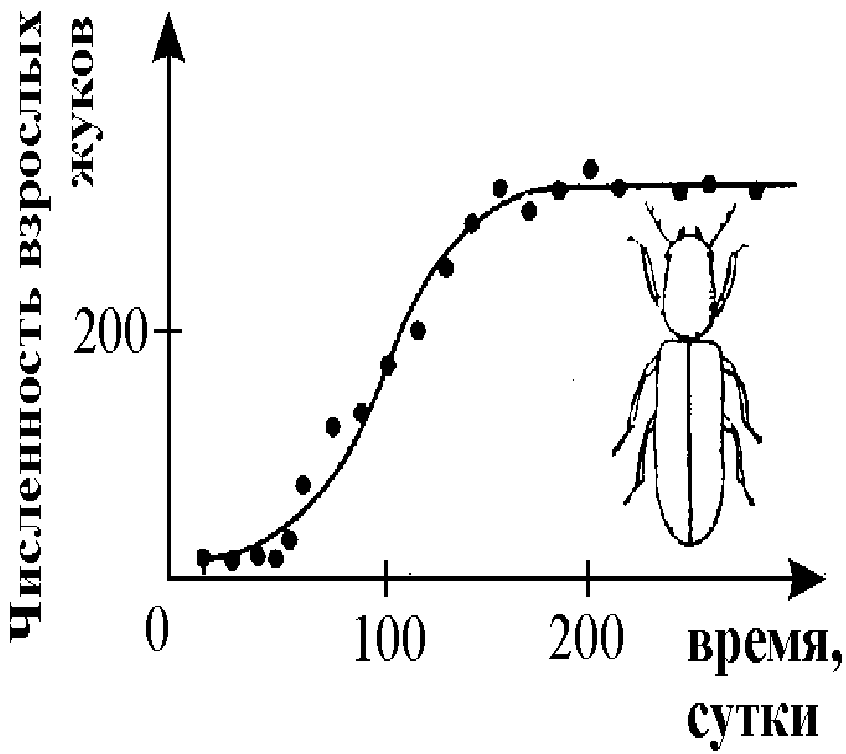
График функции $f(x)$



Поведение x во времени

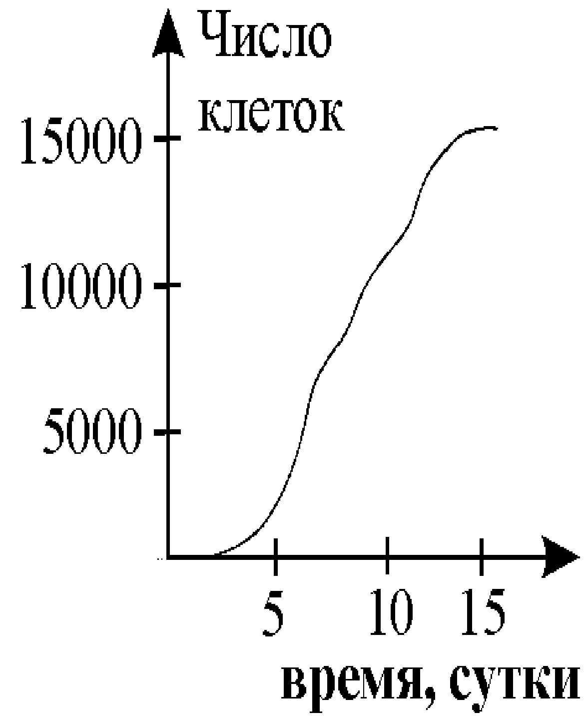
Ограниченный рост (уравнения Ферхюльста)

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$



а

Жук *Rhizoretha dominica* в 10-граммовой порции пшеничных зерен, пополняемых каждую неделю (Crombie, 1945).



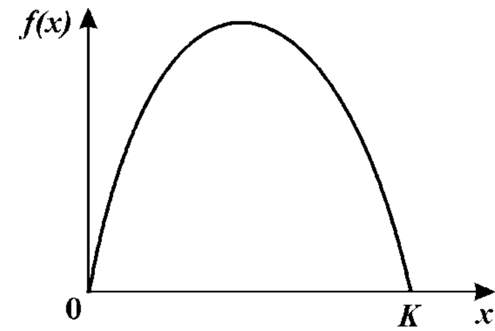
б

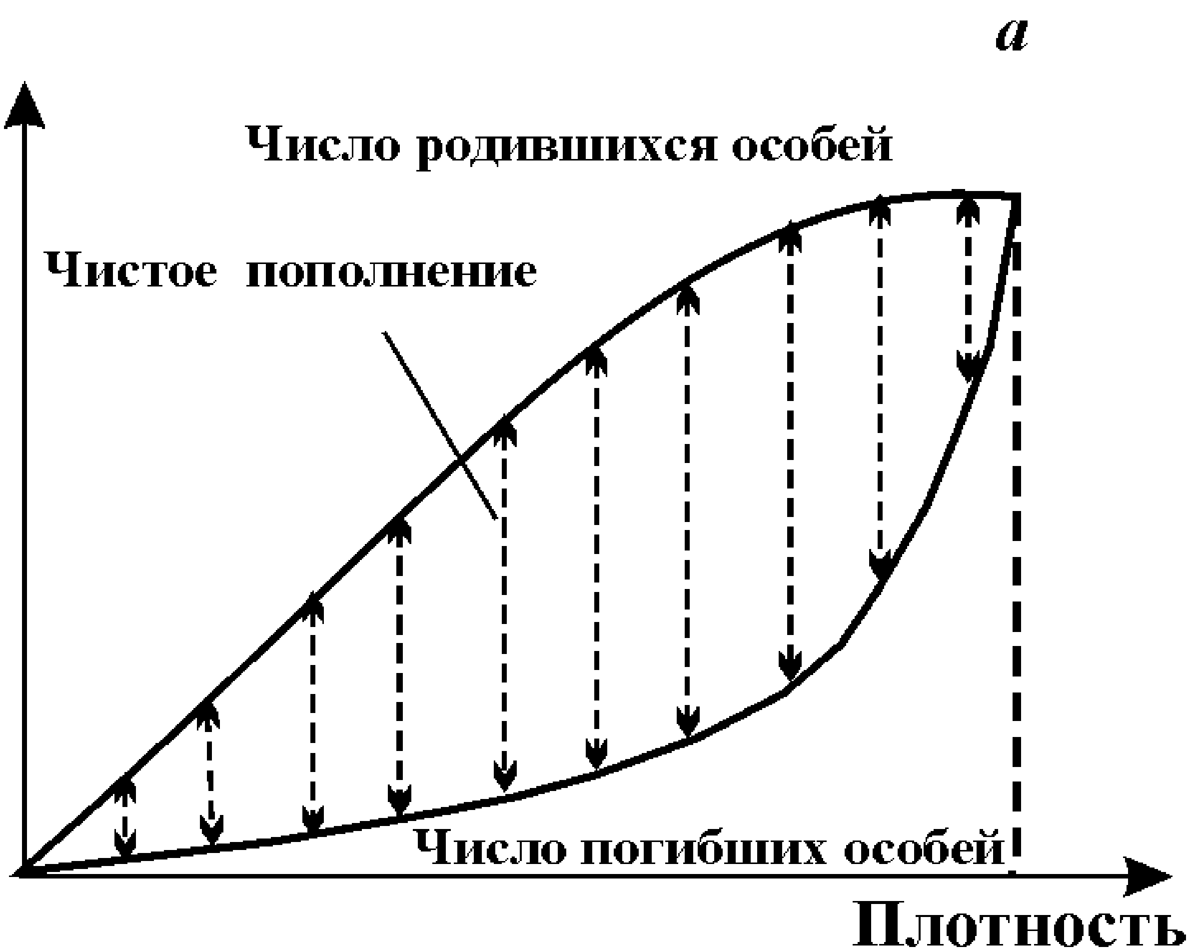
Водоросль *Chlorella* в культуре

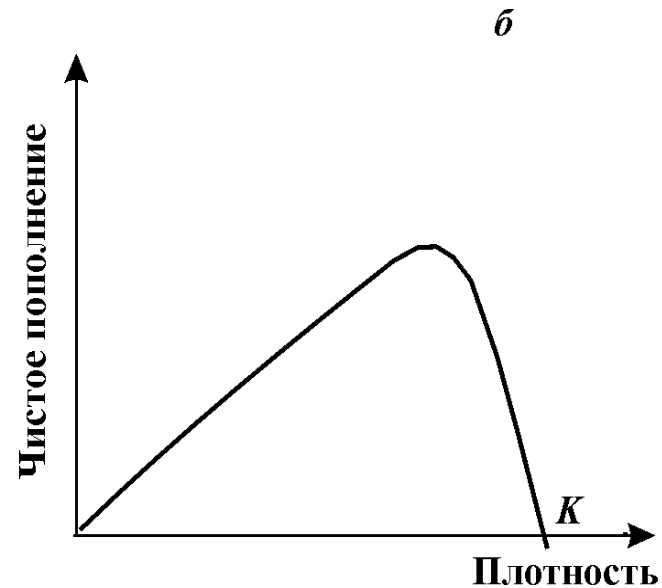
(Pearsall, Bengry, 1940)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

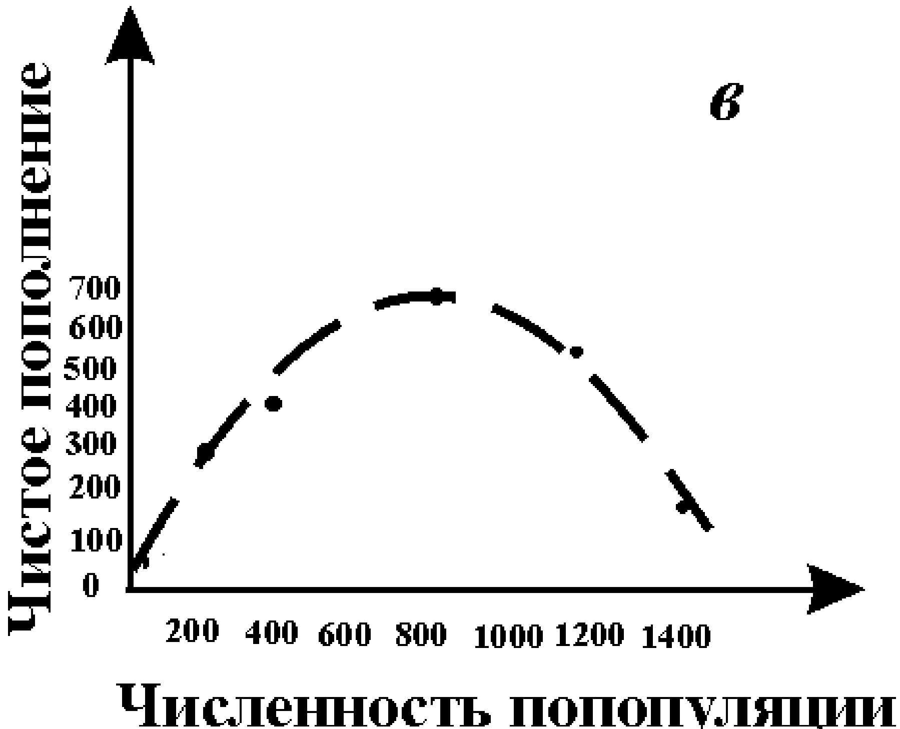
Кривые пополнения





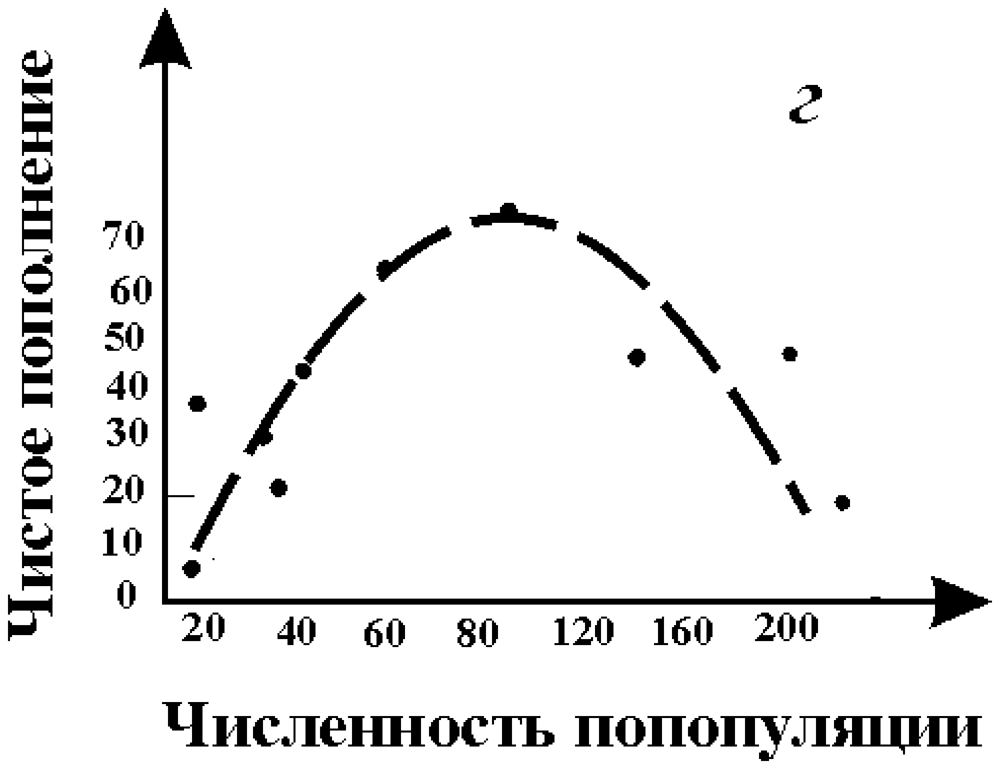


Примеры кривых пополнения (1)



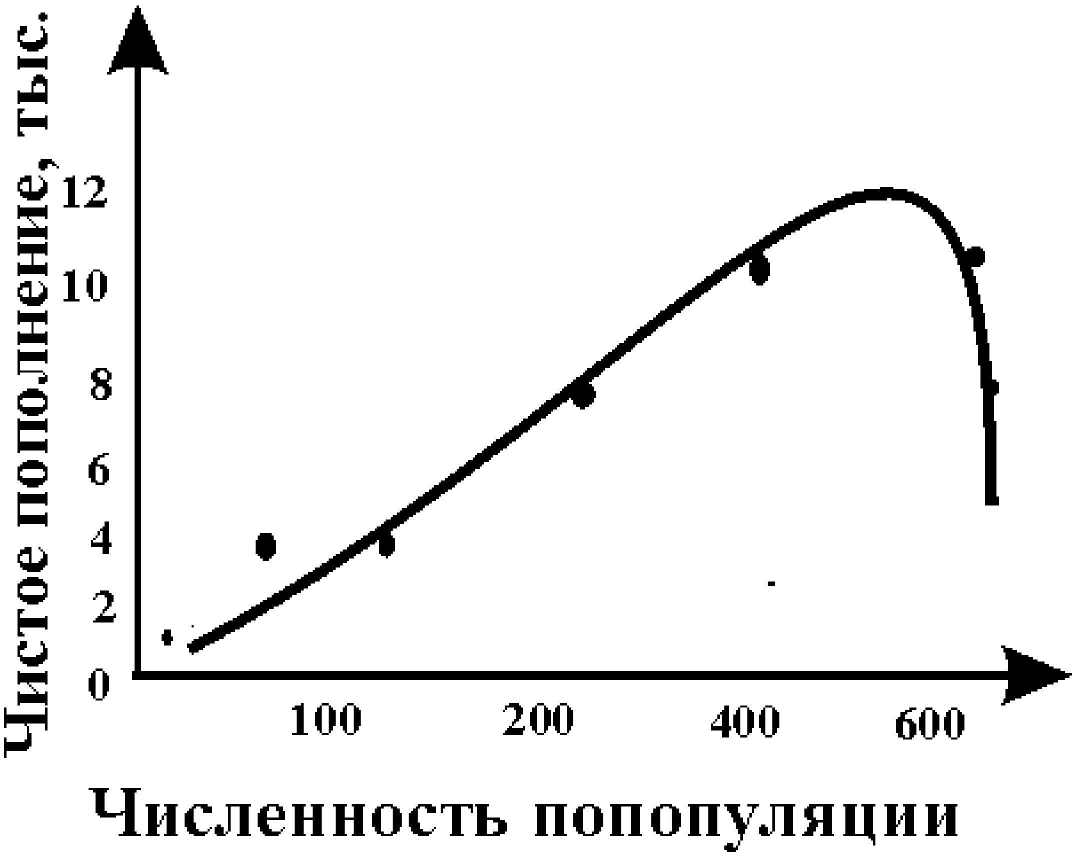
численность фазана обыкновенного на о. Протекшн - Айленд после его интродукции в 1937 г. (Einarsen, 1945);

Примеры кривых пополнения (2)



экспериментальная популяция плодовой мушки *Drosophyla melanogaster* (*Pearl, 1927*)

Примеры кривых пополнения (3)

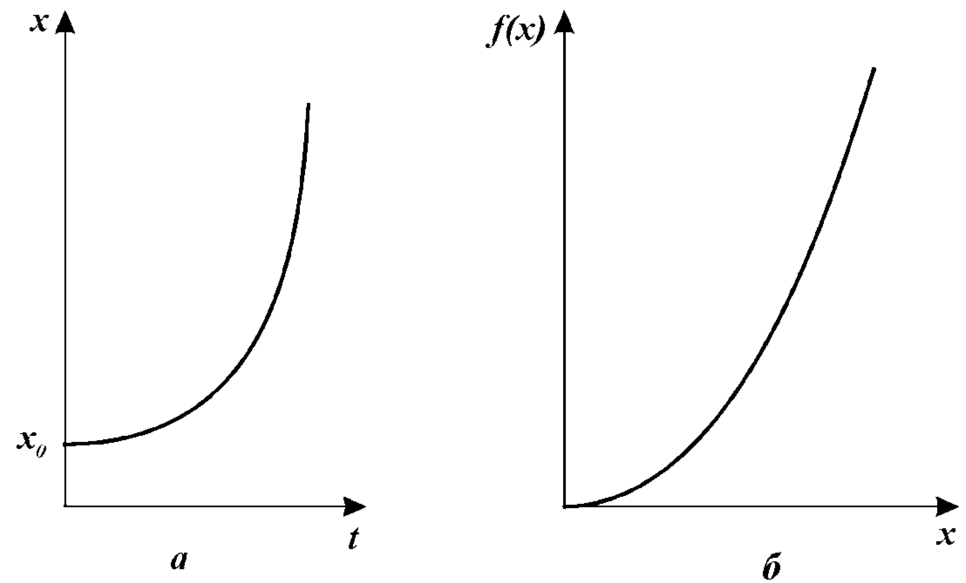


оценка численности *арктического финвала* (*Allen, 1972*)

Учет двуполого размножения

$$\frac{dx}{dt} = rx^2$$

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x}$$

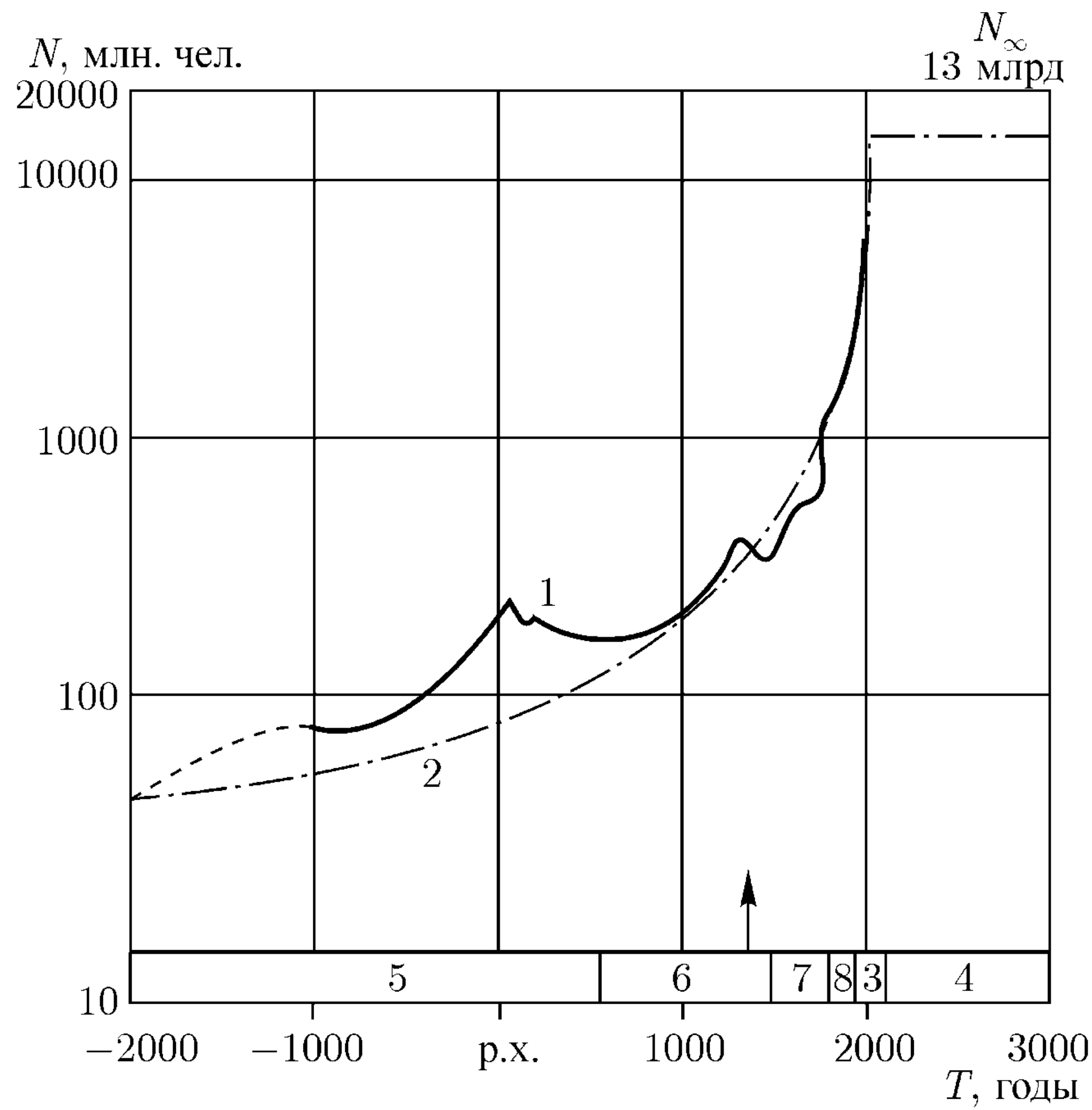


При низких плотностях скорость размножения пропорциональна вероятности встреч.
При высоких – числу самок в популяции.

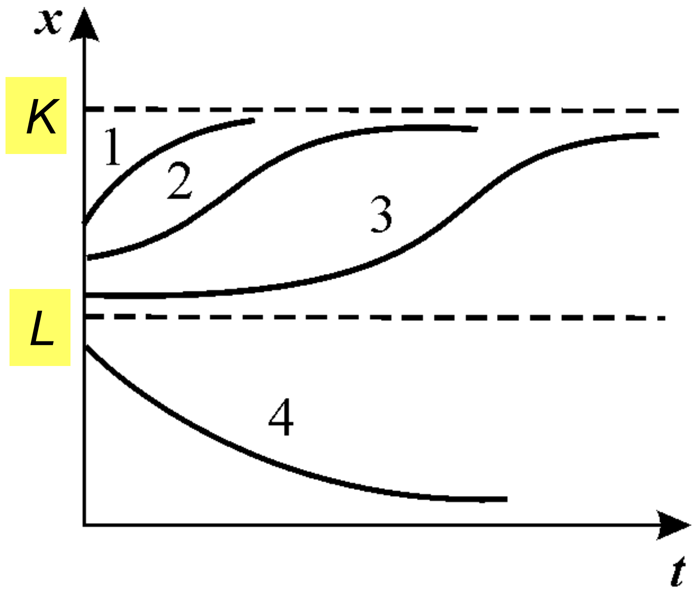
Динамика численности человечества

С.П.Капица
Общая теория роста человечества
1999

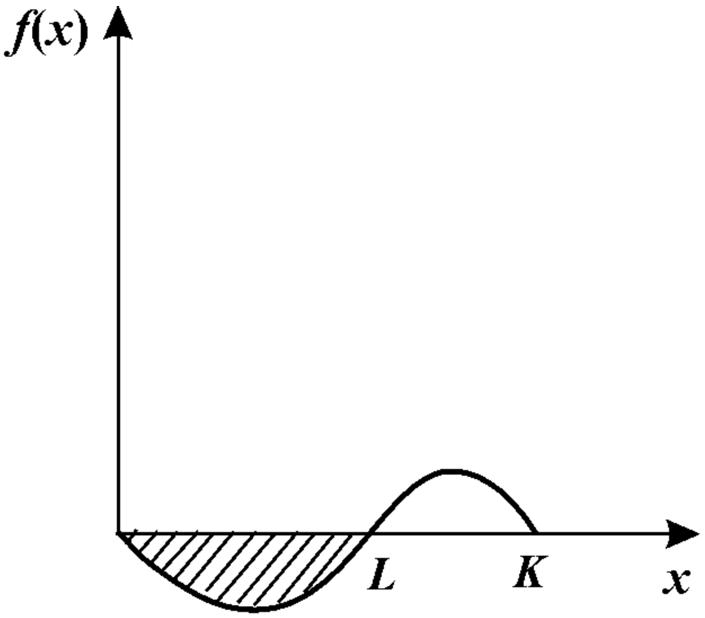
Г.Ю.Ризниченко
А.Б.Рубин
Биофизическая динамика продукционных процессов
2004
Глава 8



Наименьшая критическая численность



а



б

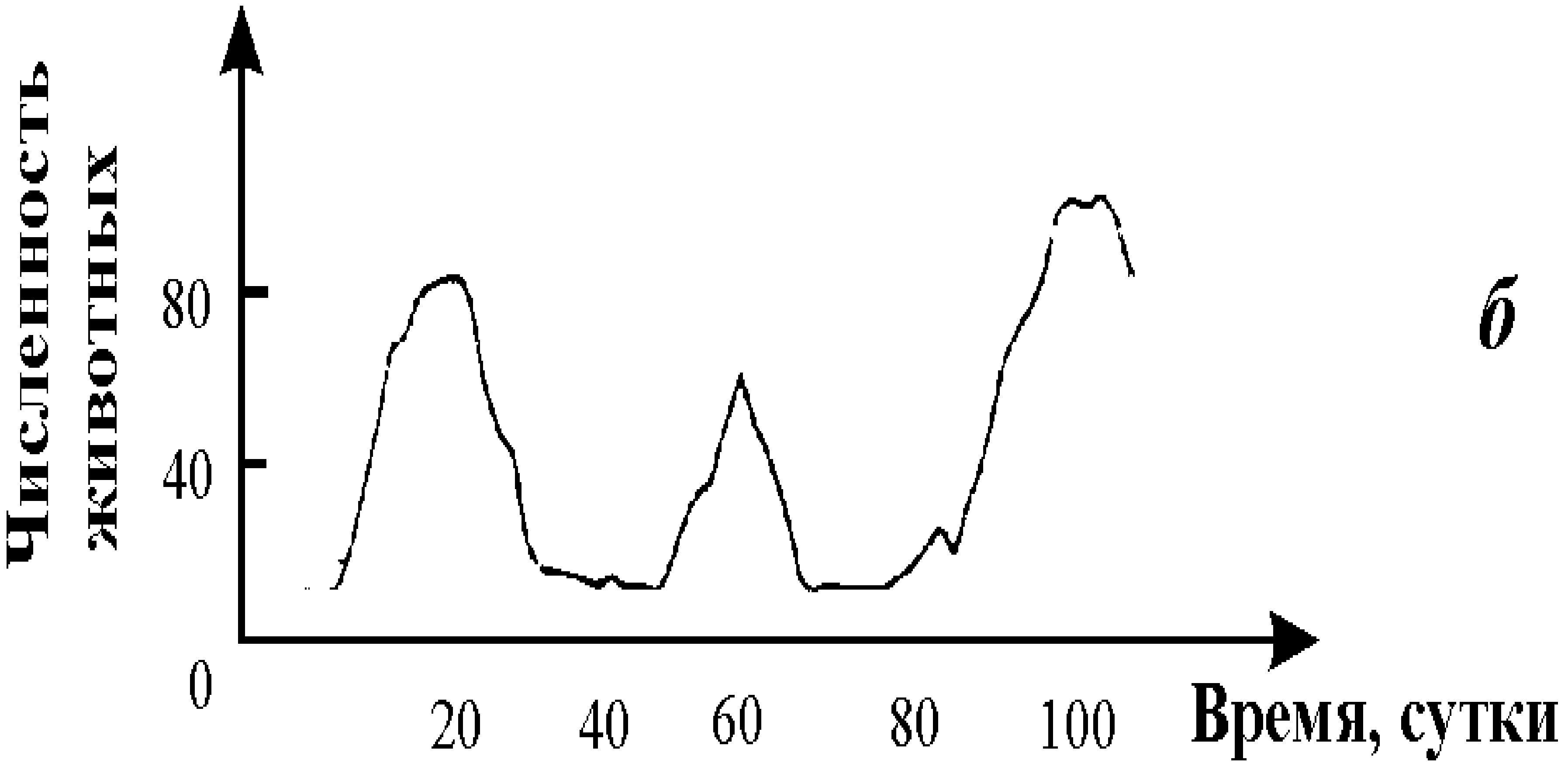
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2$$

Динамика численности популяции

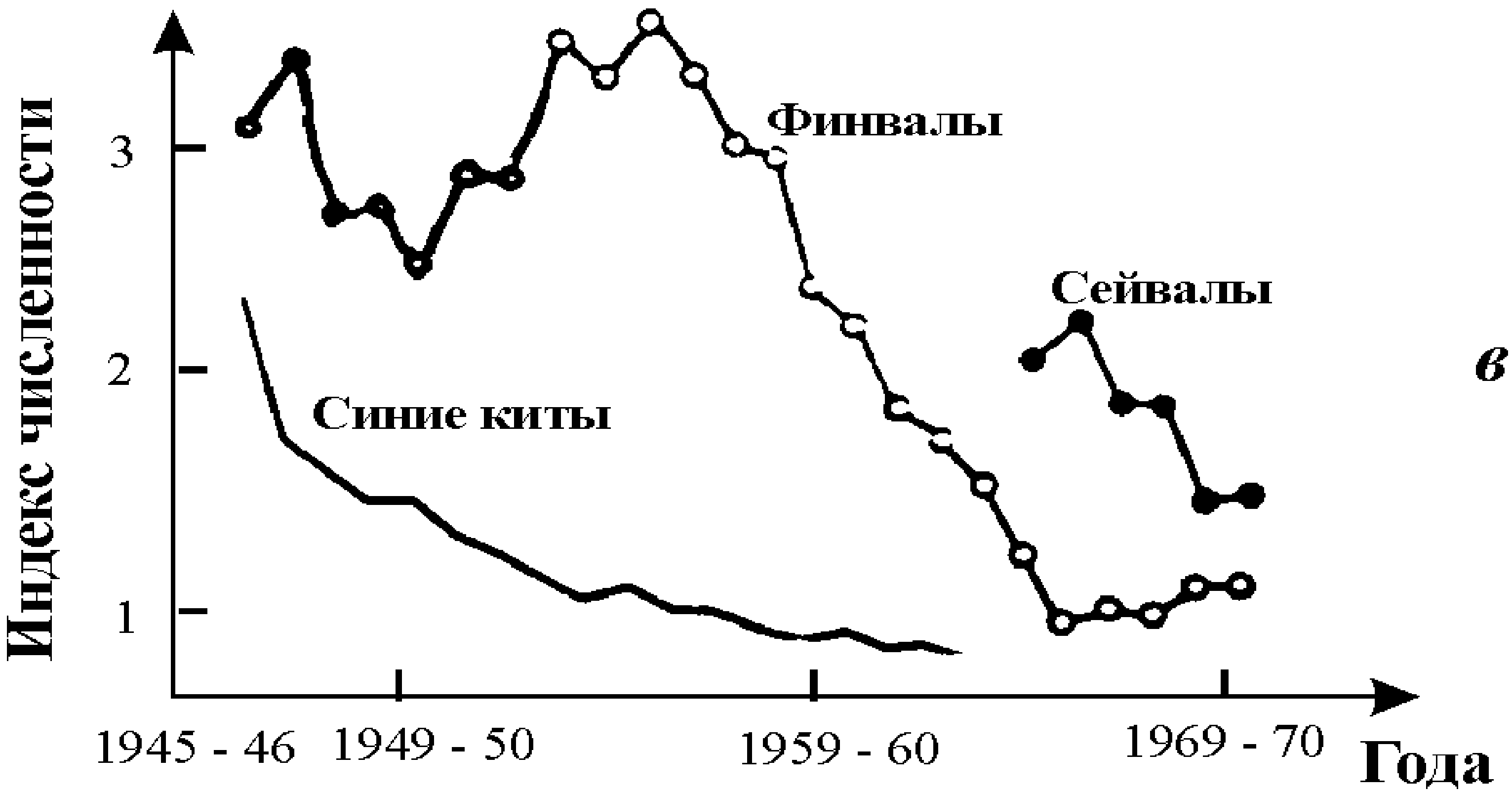
- Численность может меняться во времени различным образом: расти, совершать колебания, падать.

Численность поголовья овец на острове Тасмания (*Davidson*,1938)

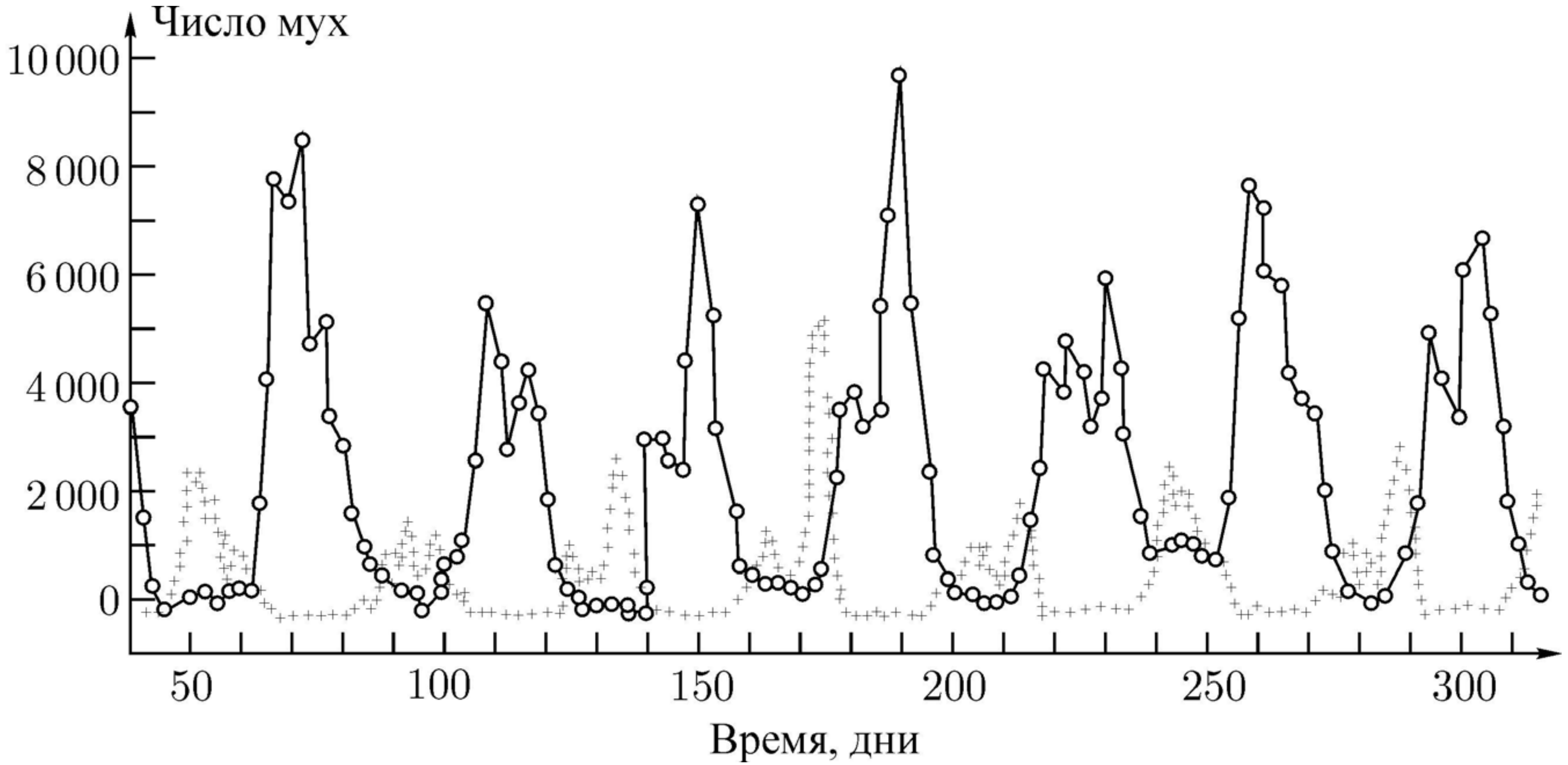
Изменение численности *Daphnia magna* (*Frall*, 1943)



Динамика численности трех видов китов в Антарктике (приведена по изменению «индекса численности» убитых китов
на 1 тыс. судо - тонно - суток, *Gulland*, 1971)



Численность мух Lucilia в популяционном ящике (Nicholson, 1954)
о – взрослые особи, + – число яиц, отложенных за один день



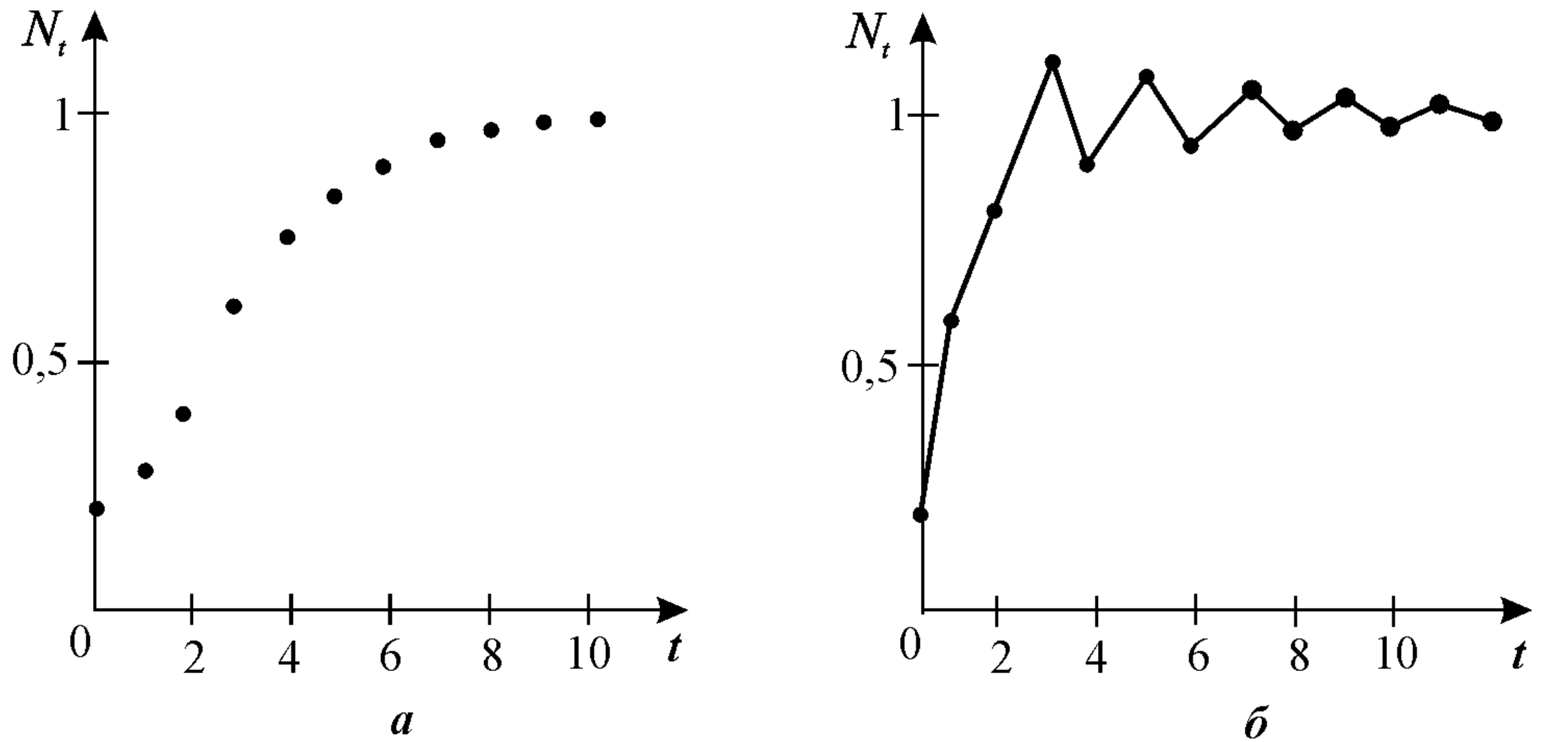
Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов

Дискретные модели популяций

Монотонный и немонотонный рост
Колебания
хаос

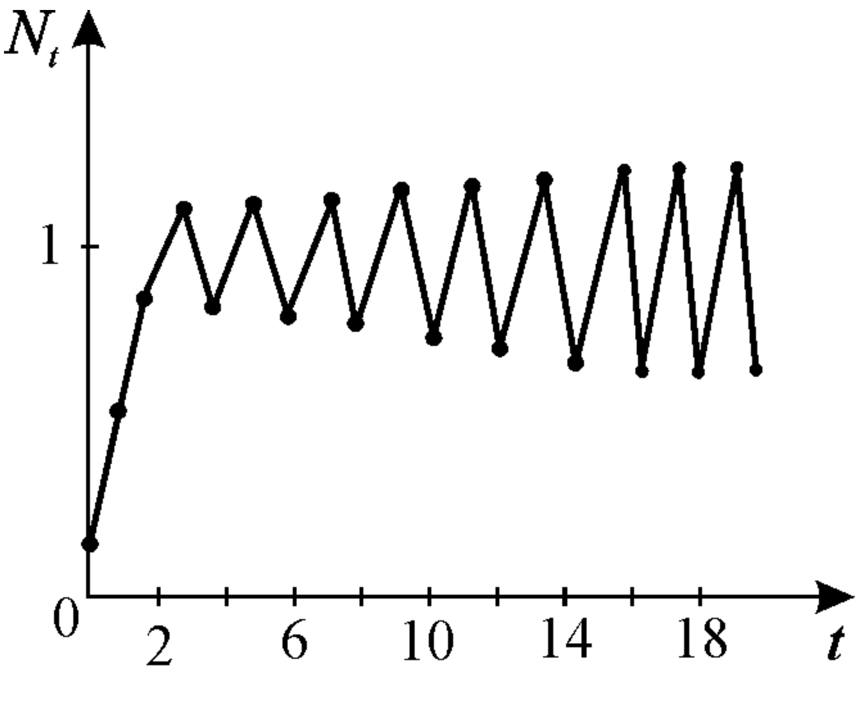
Равновесие устойчиво, если $0<r<2$, решение *монотонно* при $0 < r < 1$ и представляет собой *затухающие колебания* при $1 < r < 2$.



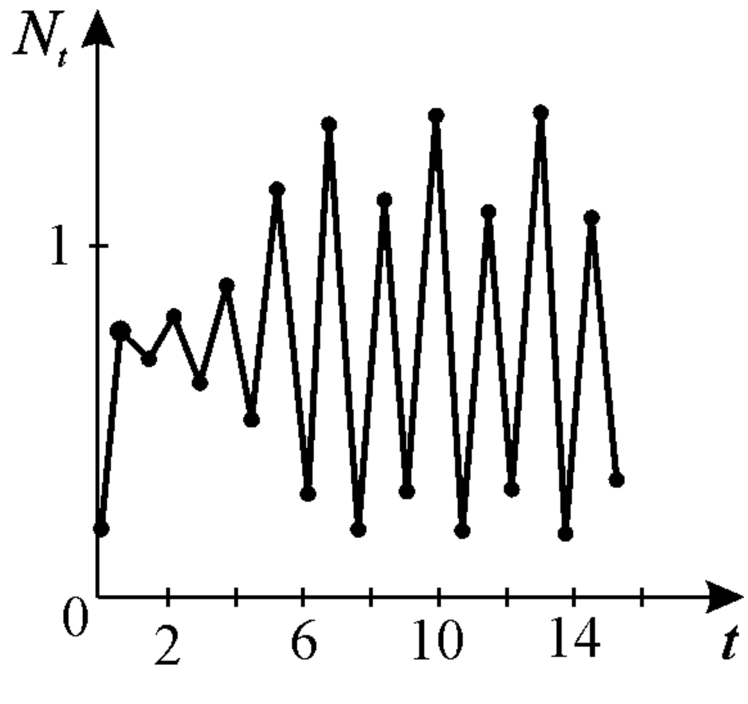
$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \right\}$$

при 2 < *r* = r_2 < 2,526 – *двухточечные циклы*

при $r_2 < r < r_c$ появляются *циклы длины 4,8,16,...,2k*.



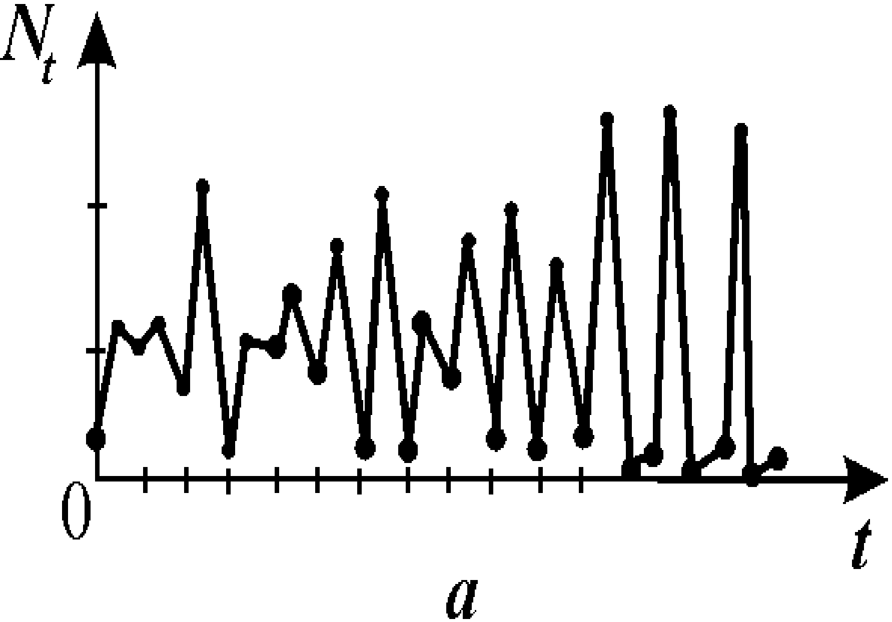
а

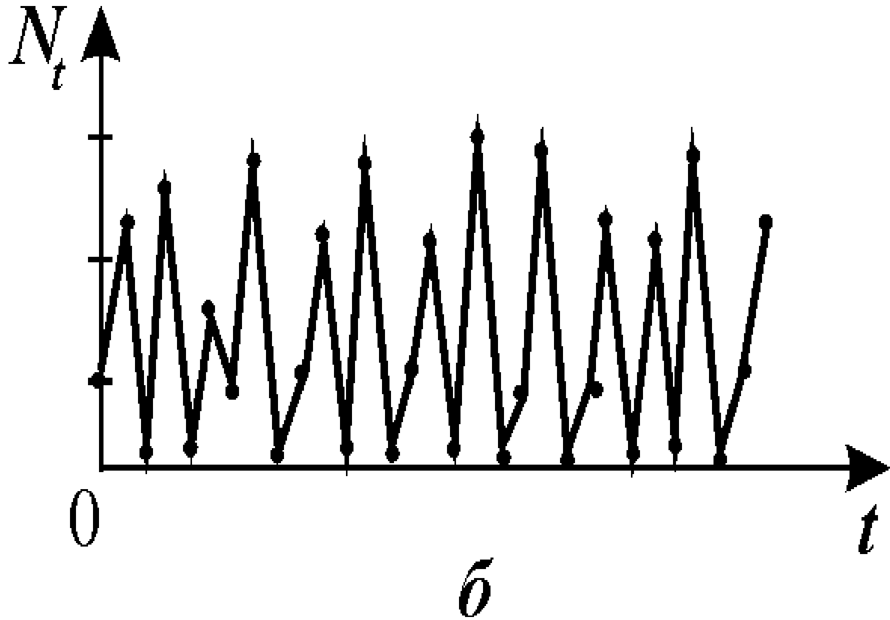


б

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \right\}$$

При $r > r_c$=3,102 решение зависит от начальных условий. Существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения.*





$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r(1 - \frac{N_t}{K}) \right\}$$