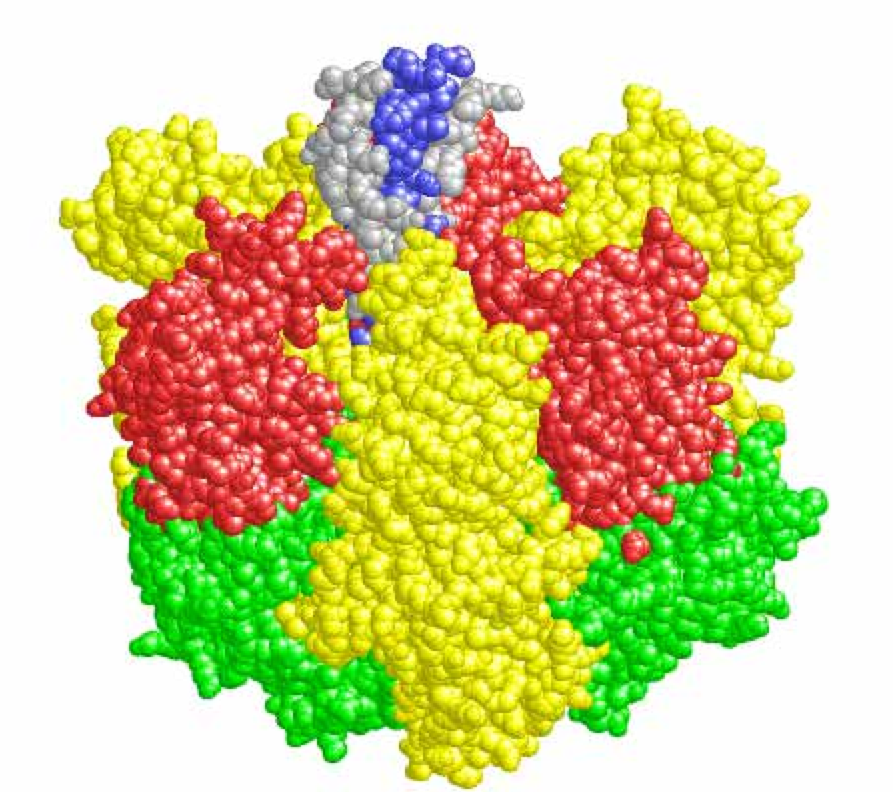
Г.Ю.Ризниченко

Колебательные процессы в биологии

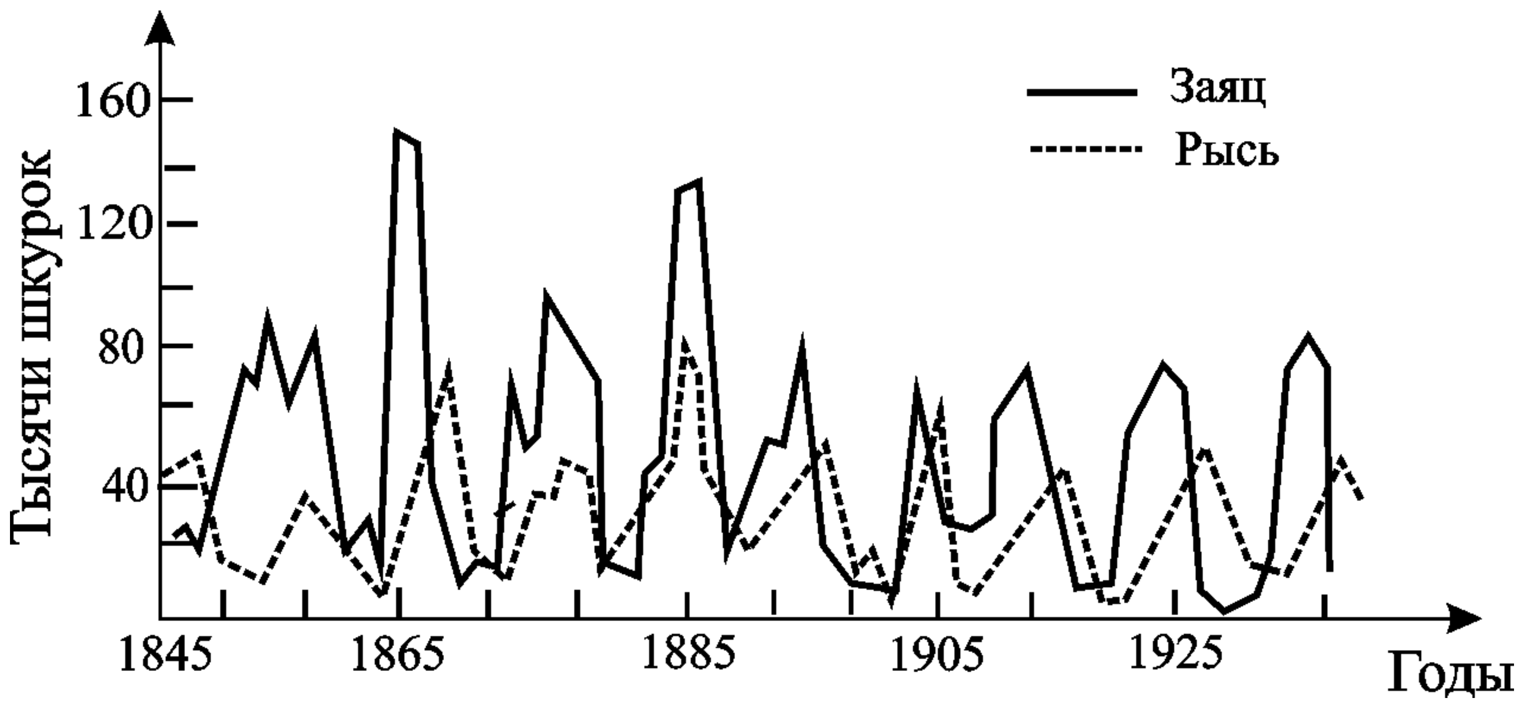
Колебательные процессы присутствуют на всех уровнях организации живой материи

от макромолекул

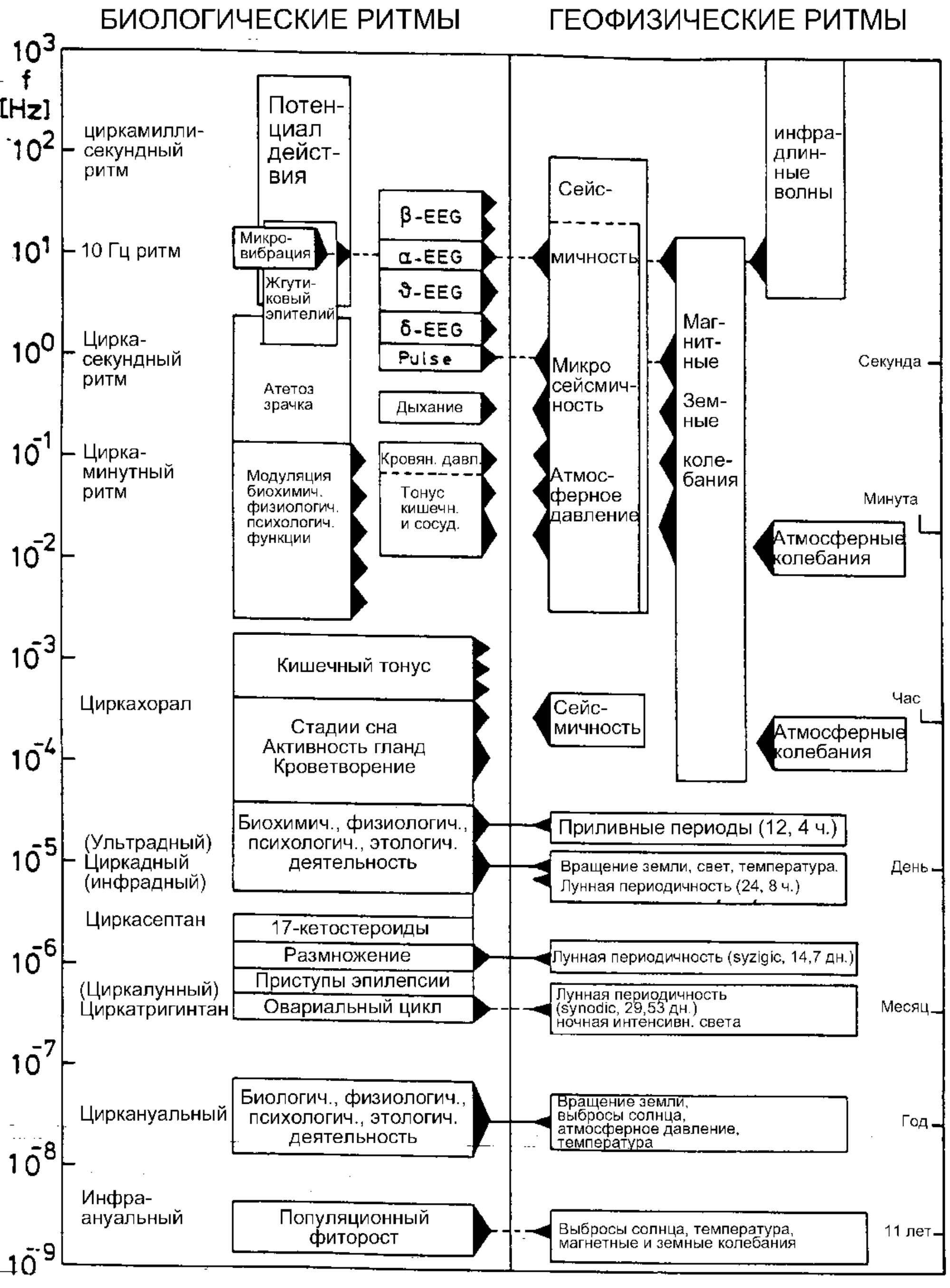
Структура АТФ-азы



До популяций и сообществ

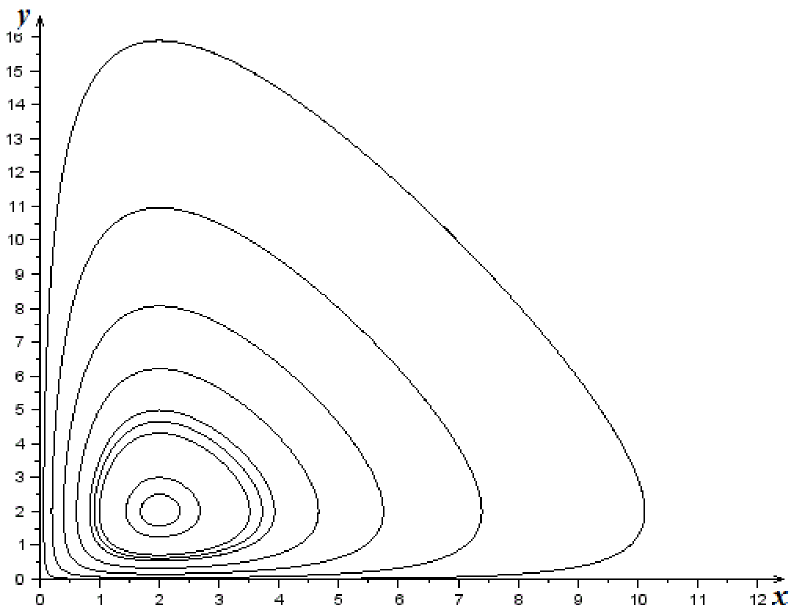


Кривые численности зайца и рыси в Канаде (по К. Вилли, В. Детье, 1974)



Биологичесие и геофизические ритмы

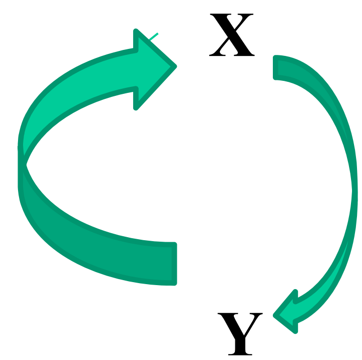
В организме человека более 300 суточных ритмов



Модель Вольтерра

При x – max, скорость **роста** y dy/dt – max –

При y – max – скорость **убыли** x dx/dy - max

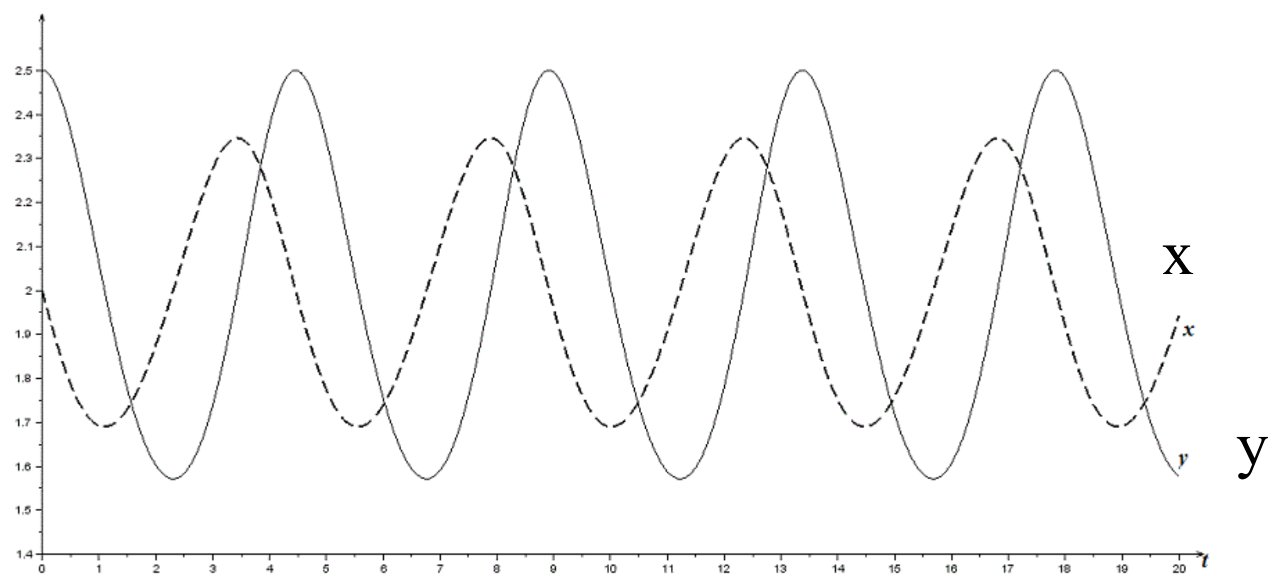


$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

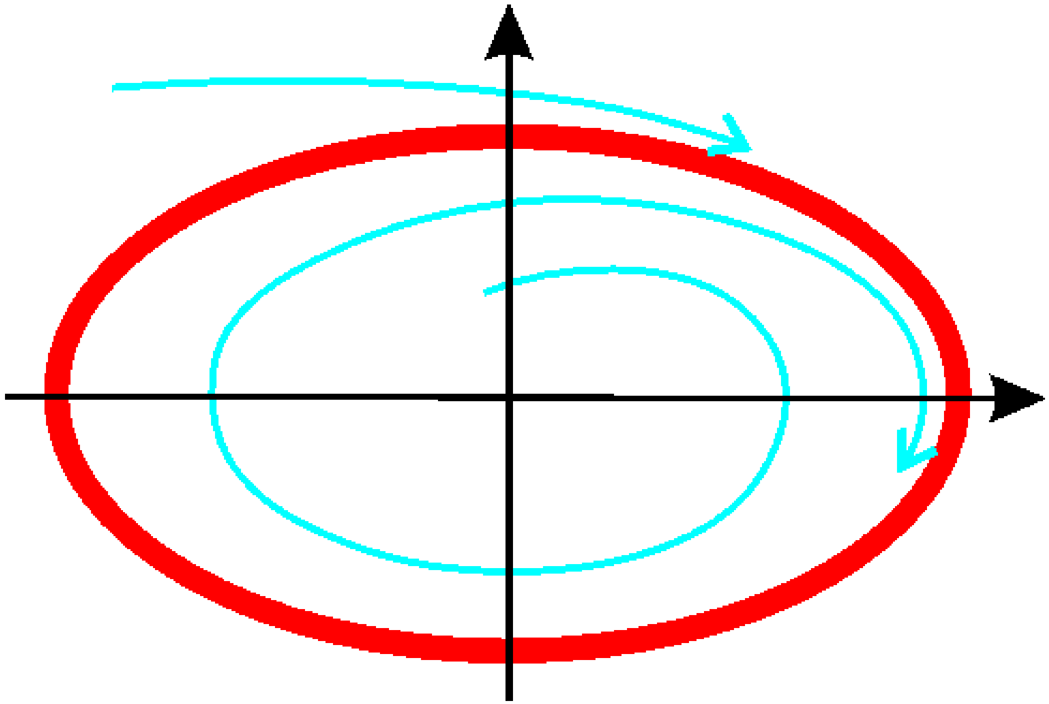
$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

$$a = 1;\ b = 0.5;$$

$$c = 1;\ d = 2$$



Предельный цикл



На фазовой плоскости автоколебания изображаются в виде замкнутой изолированной траектории – ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА

Пример 1

Для системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + x[1-(x^2+y^2)],$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y\,[1-(x^2+y^2)],$$

Окружность

$$x^2 + y^2 = 1$$

является предельным циклом

Пример 1

Параметрические уравнения предельного цикла

$$x = \cos(t - t_1), \quad y = \sin(t - t_1),$$

Уравнения всех других фазовых траекторий

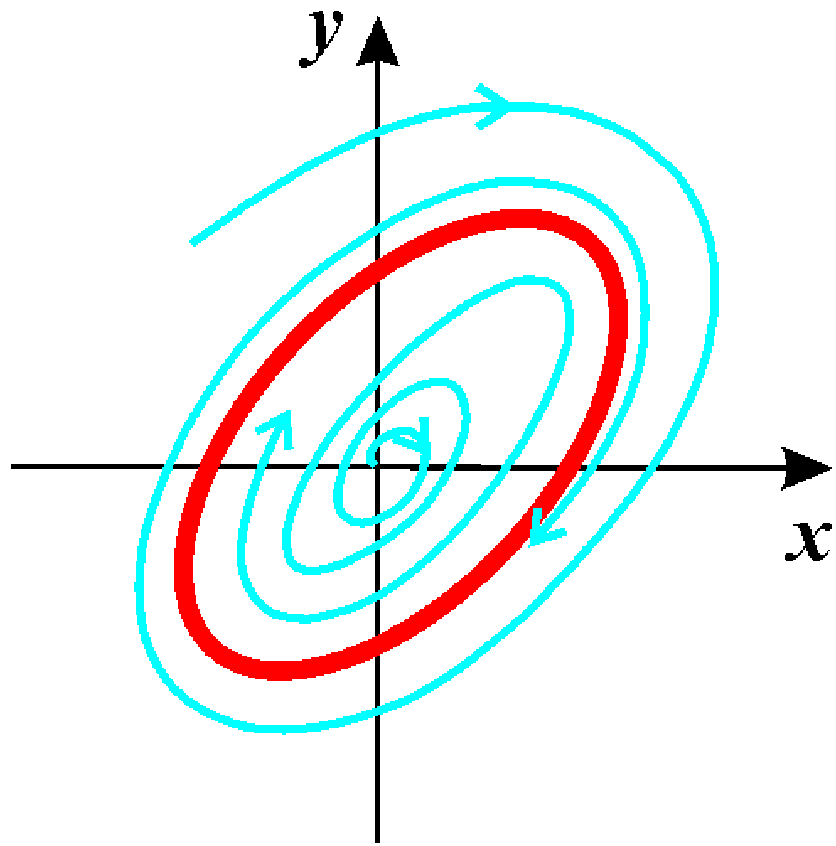
$$x = \frac{\cos(t - t_0)}{\sqrt{1 + C\,e^{-2(t - t_0)}}}, \qquad y = \frac{\sin(t - t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2(t - t_0)}}}$$

При C>0 фазовые траектории накручиваются на предельный цикл изнутри

При -1<C<0 фазовые траектории накручиваются на предельный цикл снаружи

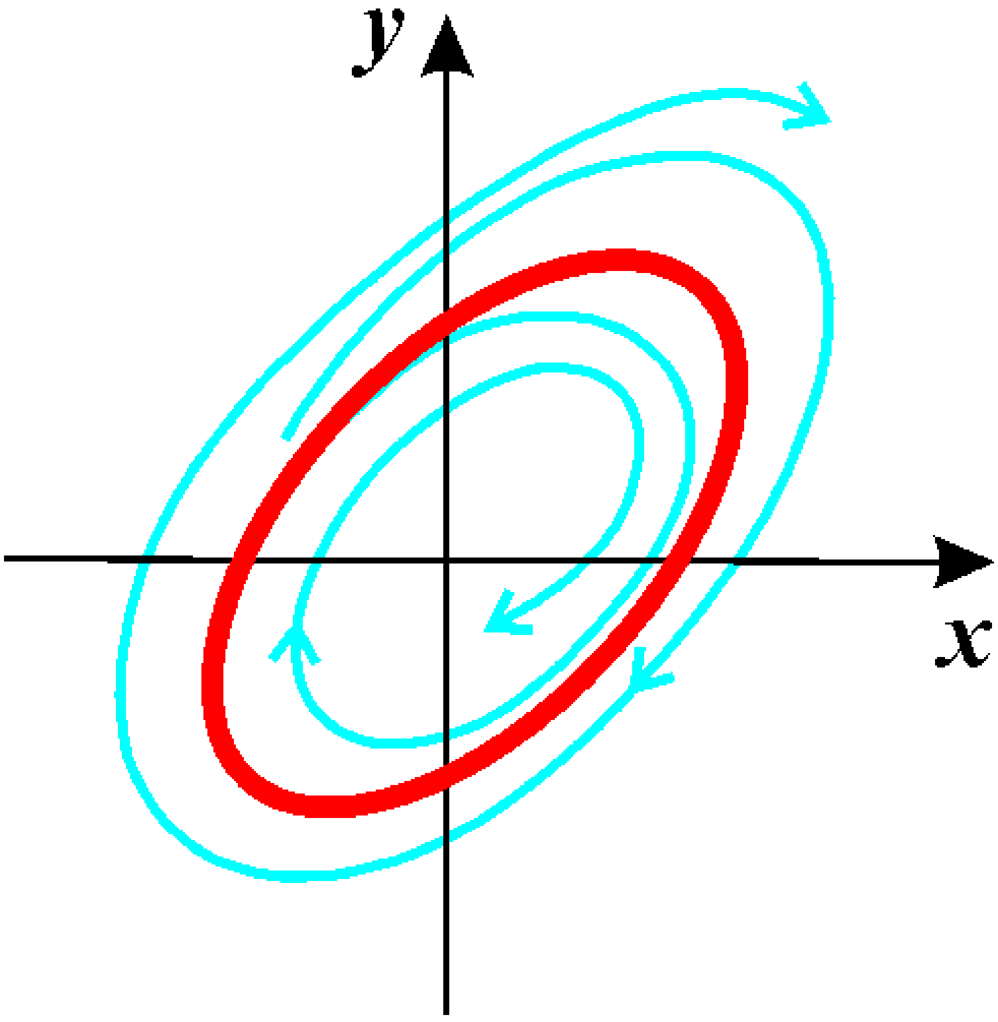
Устойчивый предельный цикл

Предельный цикл называется устойчивым, если существует такая область на фазовой плоскости, содержащая этот предельный цикл, – окрестность ε, что все фазовые траектории, начинающиеся в окрестности ε, асимптотически при $t \to \infty$ приближаются к предельному циклу.



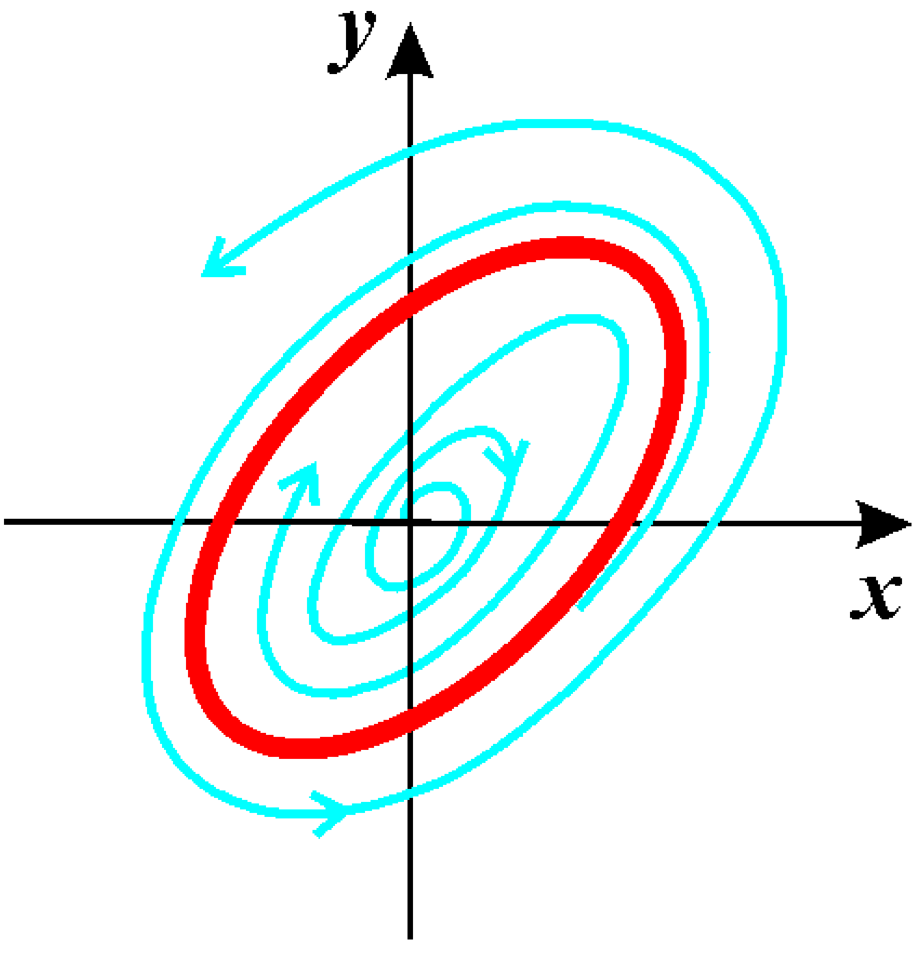
Неустойчивый предельный цикл

Если же, наоборот, в любой сколь угодно малой окрестности ε *предельного цикла существует по крайней мере одна фазовая траектория, не приближающаяся к предельному циклу при* $t \to \infty$, *то такой предельный цикл называется неустойчивым*.



Полуустойчивый предельный цикл

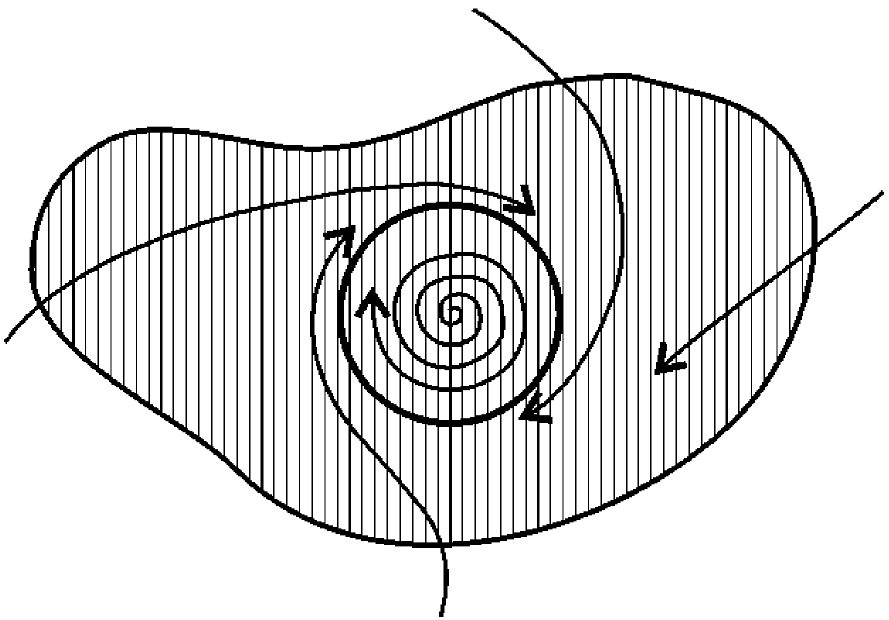
Такие циклы также называют двойными.
При некотором значении параметра они расщепляются на два, один из которых устойчив, а другой - неустойчив



Теоремы существования предельного цикла (1)

Теорема 1

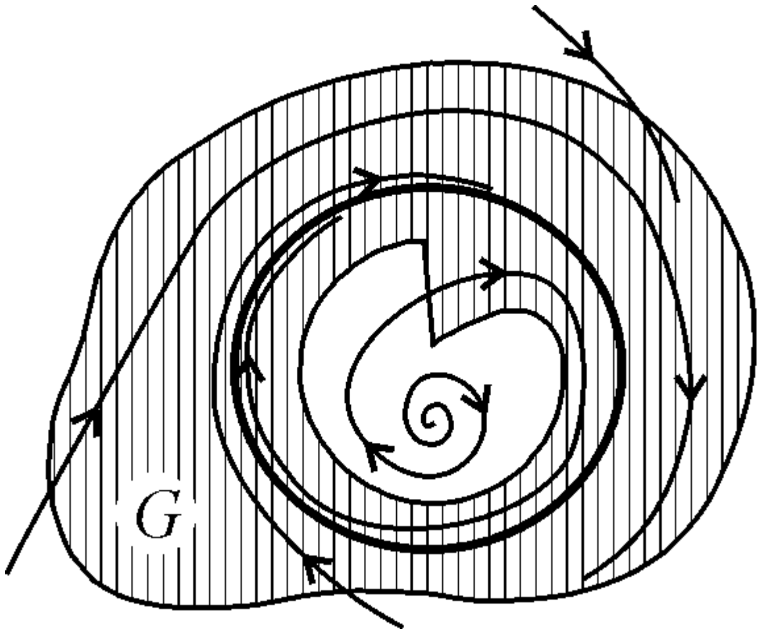
Если существует на фазовой плоскости некоторая замкнутая область, такая, что все фазовые траектории, пересекающие границу этой области, входят в нее, и внутри этой области находится неустойчивая особая точка, отличная от седла, то в этой области обязательно имеется хотя бы один предельный цикл



Теоремы существования предельного цикла (2)

Теорема 2

Пусть на фазовой плоскости существует область, из которой фазовые траектории не выходят, и в которой нет положений равновесия (особых точек). Тогда в этой области обязательно существует предельный цикл, причем все остальные траектории обязательно наматываются на него.



Критерии отсутствия замкнутых траекторий

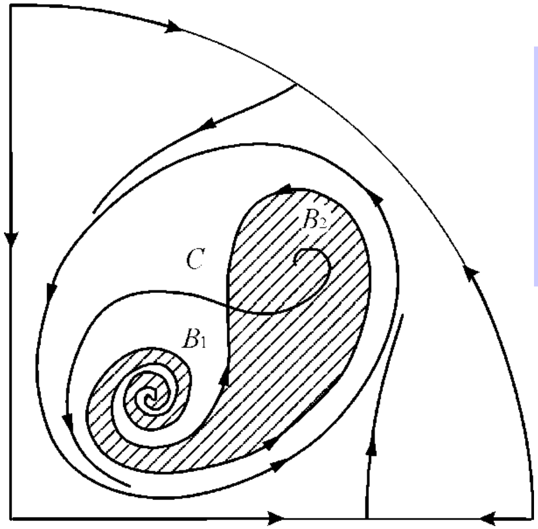
- 1. Если в системе не существует особых точек, то в ней не может быть и замкнутых фазовых траекторий.
- 2. Если в системе существует только одна особая точка, отличная от узла, фокуса и центра (например, седло), то такая система не допускает замкнутых фазовых траекторий.
- 3. Если в системе имеются только простые особые точки, причем через все точки типа узел и фокус проходят интегральные кривые, уходящие на бесконечность, то в такой системе нет замкнутых фазовых траекторий.

Устойчивость предельного цикла

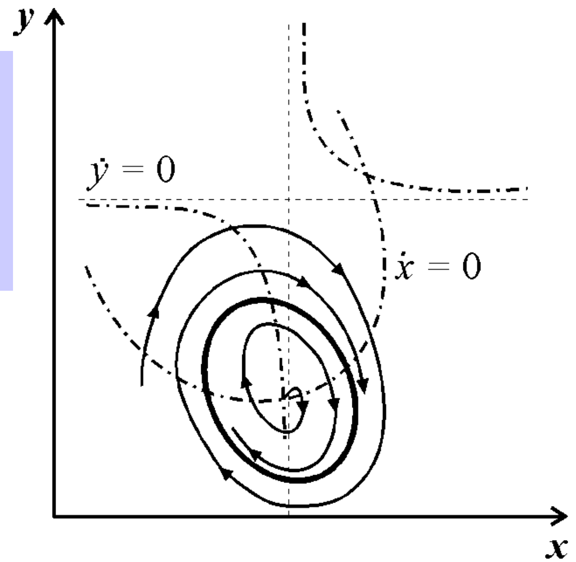
Предельный цикл устойчив, если $h < 0$ и неустойчив, если $h > 0$. Если же $h = 0$, уравнения первого приближения не решают вопроса об устойчивости периодического движения.

$$h = \frac{1}{T}\int_0^T \{P'_x[\varphi(t), \psi(t)] + Q'_y[\varphi(t), \psi(t)]\}\,dt,$$

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — любое периодическое решение, соответствующее рассматриваемому предельному циклу,
T — период решения.

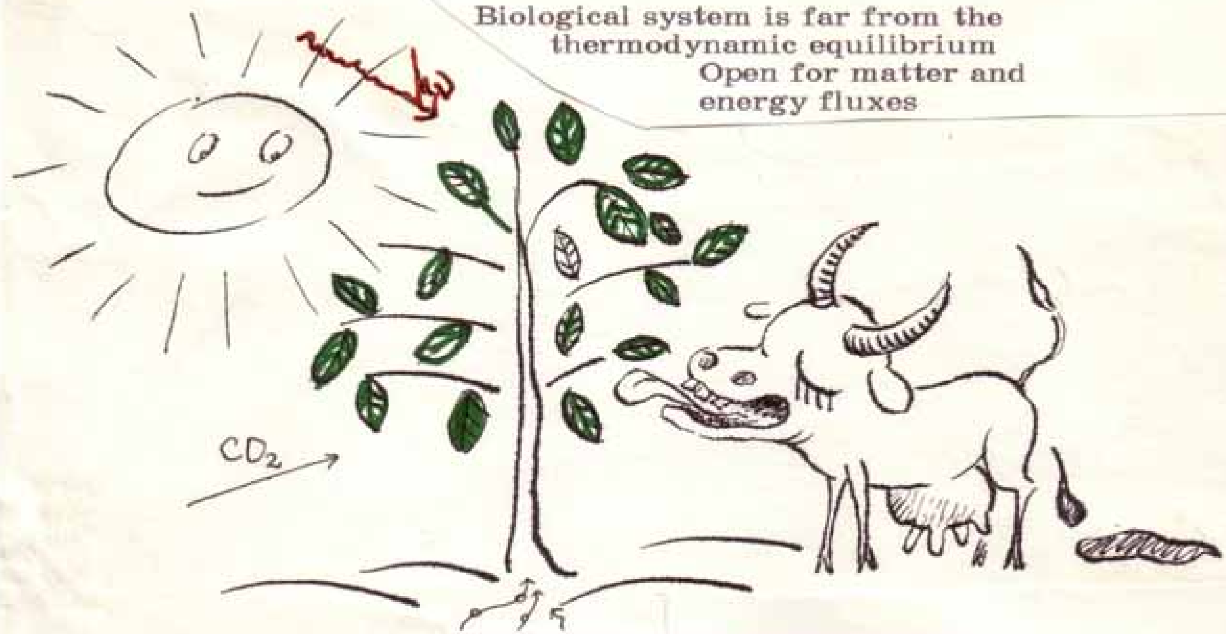


ВАЖНО



Предельные циклы возможны лишь в системе, правые части которой представлены нелинейными функциями.

ТОЛЬКО В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ БЫВАЮТ



Kinetic model is **NONLINEAR**

Only in NONLINEAR SYSTEM

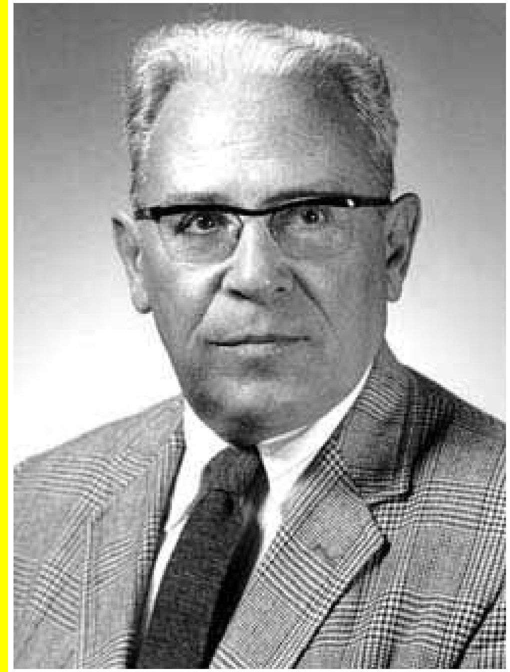
SELFORGANIZATION IN TIME:

1. selfoscillation
2. multistability
3. quasystochastic regimes in deterministic systems

SELFORGANIZATION IN SPACE

1. autowaves
2. dissipative structures
   (nonequilibrium stady distributions)
3. stochastic in space regimes

Рождение предельного цикла. Бифуркация Андронова-Хопфа



Андронов Александр Александрович (1901-1952)

Эберха́рд Фредери́к Фердина́нд Хо́пф (1902-1983)

Бифуркация впервые была исследована А.А. Андроновым (1937) для случая $N = 2$ и обобщена Е. Хопфом (1942) на системы с произвольной размерностью. (Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., Наука, 1981)

Модельная система мягкого возбуждения автоколебаний

$$\frac{dr}{dt} = r\,(c - r^2),$$

r и φ - полярные координаты

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\pi.$$

При увеличении параметра c при $c = 0$ фокус теряет устойчивость и рождается предельный цикл

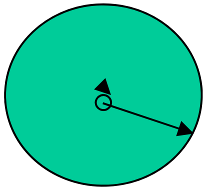
Стационарные решения

$$r(c - r^2) = 0.$$

1. $\boxed{\bar{r}_1 = 0}$

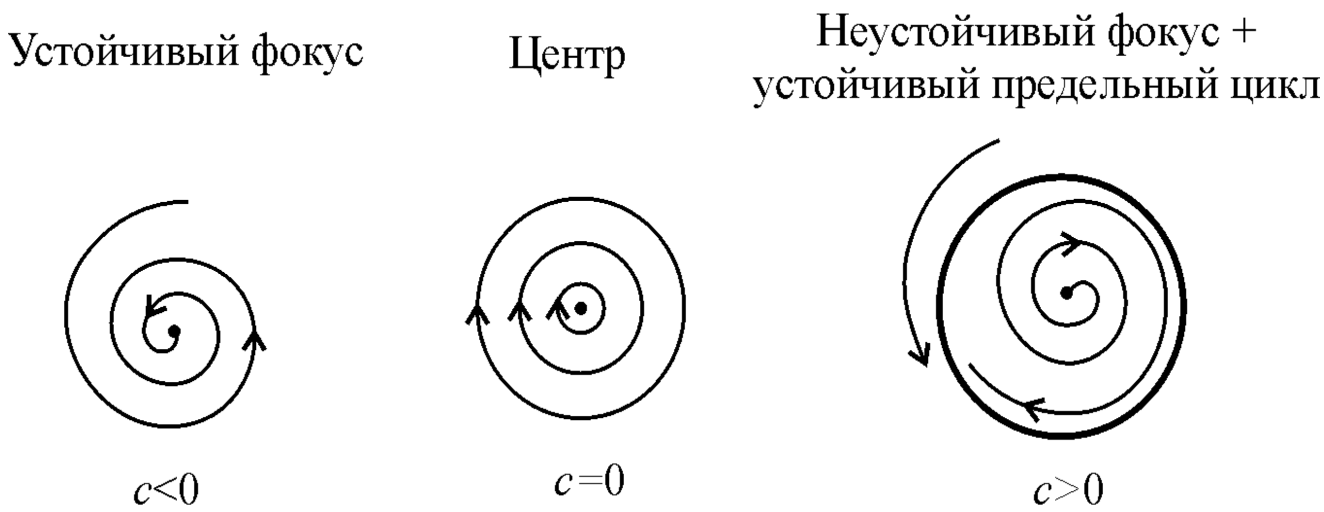
2,3. $c - \bar{r}^2 = 0$ $\qquad \bar{r}_{2,3} = \pm\sqrt{c}$

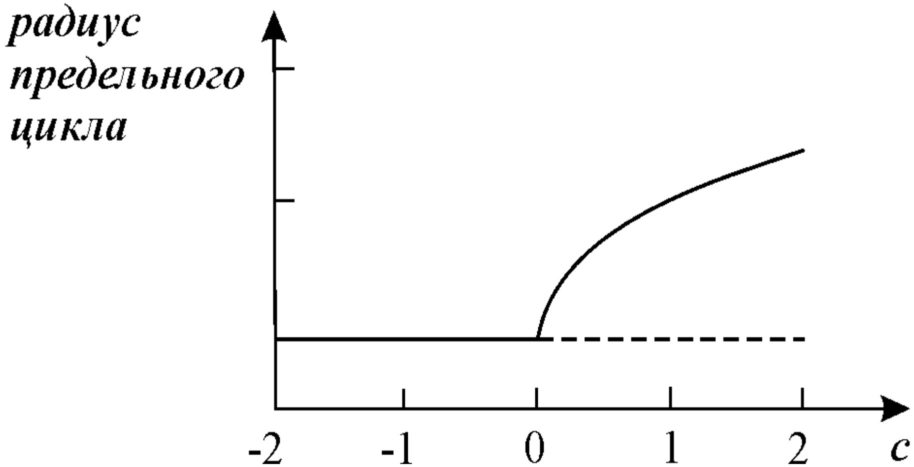
Имеет реальный смысл $\boxed{\bar{r}_2 = \sqrt{c}}$



Окружность радиуса с

Суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа (мягкое возбуждение)





$$\frac{dr}{dt} = r\,(c - r^2),$$

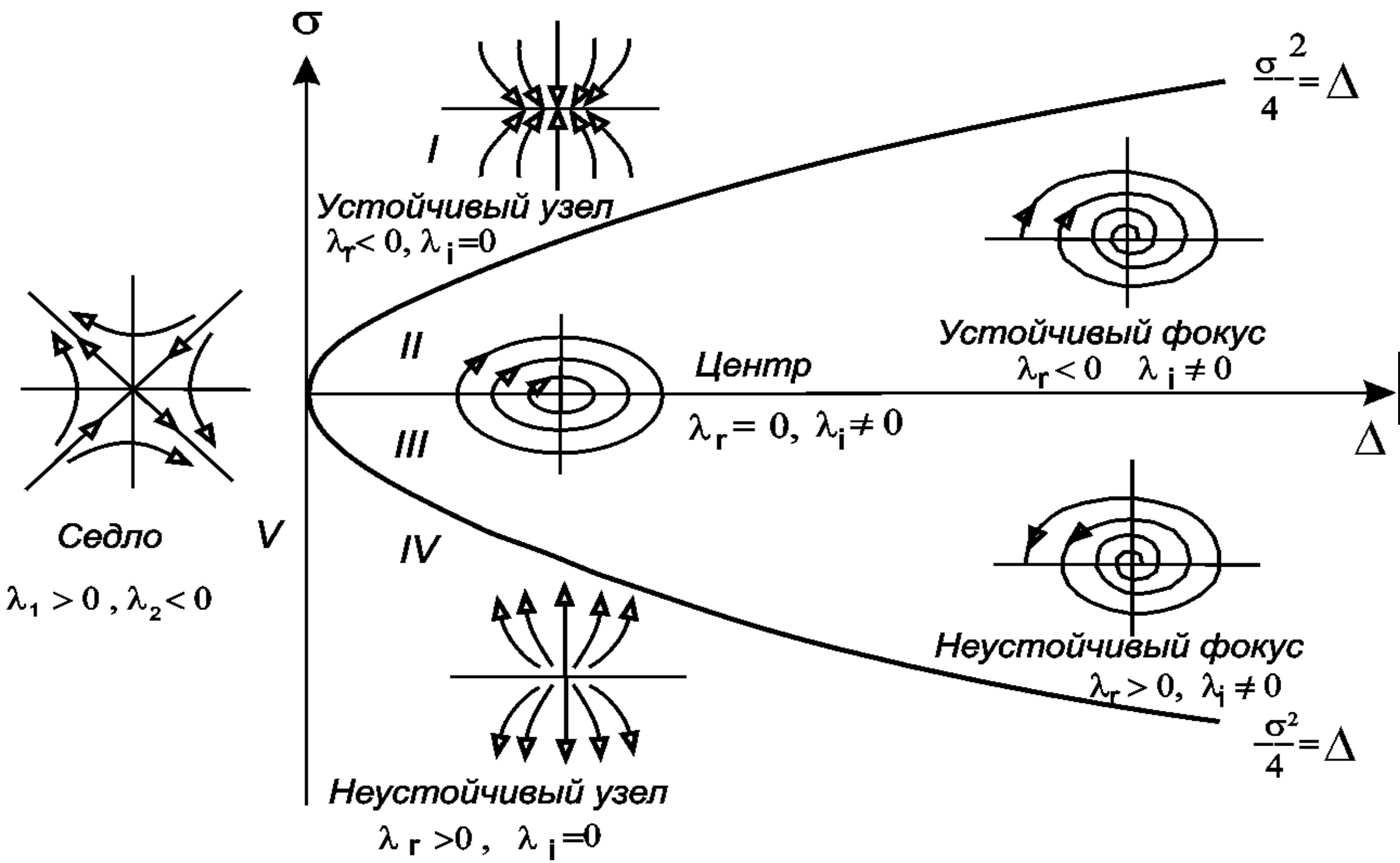
$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\pi.$$

Бифуркацонная диаграмма линейной системы

$$\sigma = -(a+d);\ \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$
$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



Центр

Модельная система жесткого возбуждения автоколебаний

$$\frac{dr}{dt} = r\left(\frac{c}{4} + r^2 - r^4\right),$$

$$r = 0,$$

$$r^2 = \frac{1}{2}\left[1 \pm (1+c)^{1/2}\right].$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\pi.$$

При $c = -1$ рождается неустойчивый предельный цикл малой амплитуды и устойчивый предельный цикл конечной амплитуды

При $c > -1$ второе стационарное решение – устойчивый предельный цикл.
При $-1 < c < 0$ три стационарных решения – точка r=0, неустойчивый предельный цикл с амплитудой $r^2 = \frac{1}{2}\left[1 - (1+c)^{1/2}\right].$

При c>0 неустойчивый предельный цикл пропадает

Субкритическая бифуркация Андронова – Хопфа

Устойчивый фокус

Устойчивый фокус, неустойчивый предельный цикл, устойчивый предельный цикл

Неустойчивый фокус, устойчивый предельный цикл

$c< -1$ *а*

$-1<c<0$ *б*

$c>0$ *в*

$$\frac{dr}{dt}=r(\frac{c}{4}+r^2-r^4)],$$

$$r^2=1\pm(1+c)^{1/2}.$$

Ветвь $r = 0$ устойчива при $c < 0$ и неустойчива при $c > 0$.