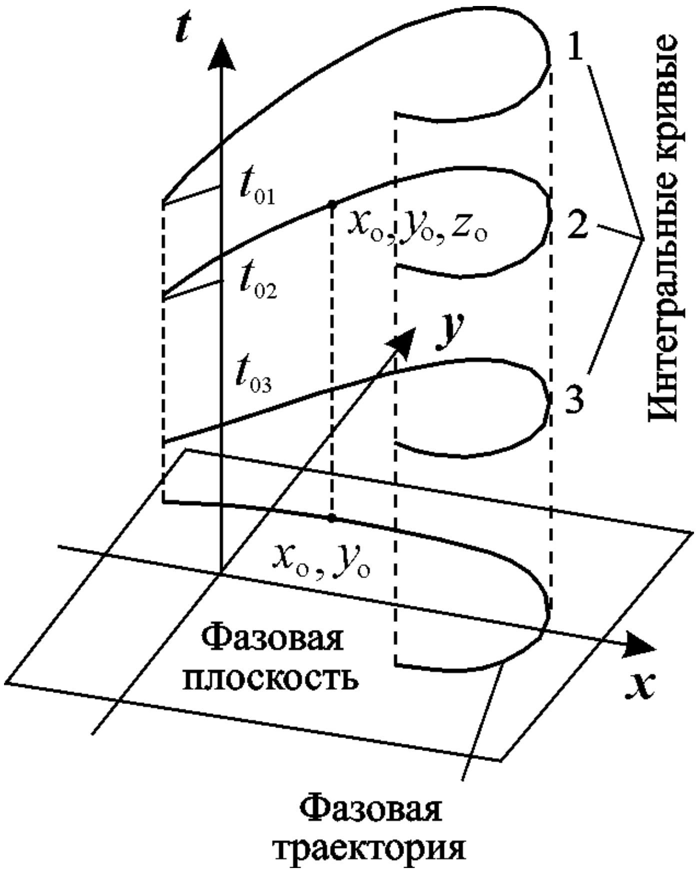
Фазовая плоскость
Качественное исследование

Анализ устойчивости стационарного состояния системы двух автономных дифференциальных уравнений

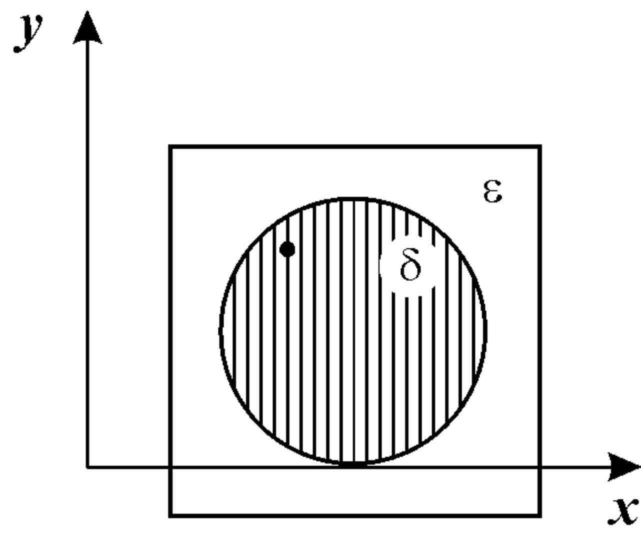
Траектории системы в пространстве (x,y,t)



Жюль Анри Пуанкаре́
(Jules Henri Poincaré)
1854-1912)

Определение устойчивости

- *Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ, никогда не достигнет границы ε.*



Типы устойчивости стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Ляпуно́в Алекса́ндр Миха́йлович (1857 – 1918) – выдающийся русский математик, создал теорию устойчивости состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Работал также в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей

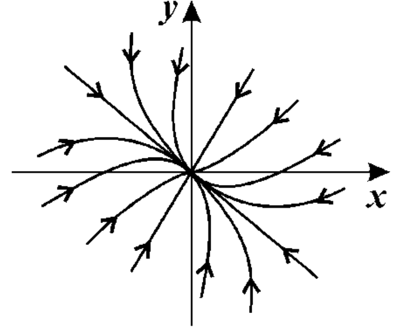
Типы поведения фазовых траекторий в окрестности стационарного состояния для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

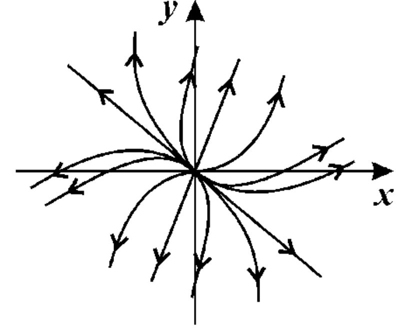
$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

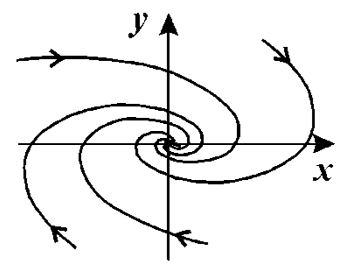
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$



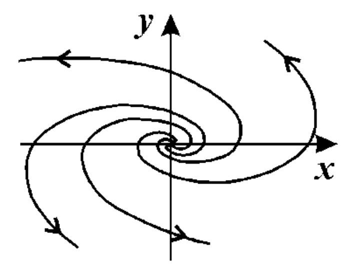
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



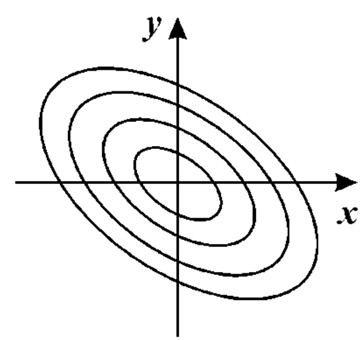
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



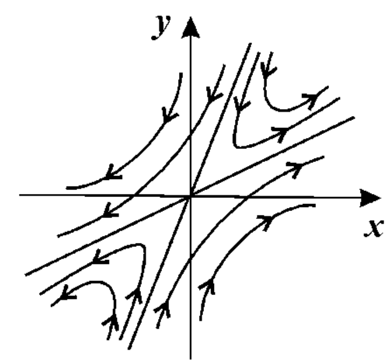
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)



Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Если *оба корня* имеют ***отрицательную*** *действительную* часть и, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то *состояние равновесия* ***устойчиво;***

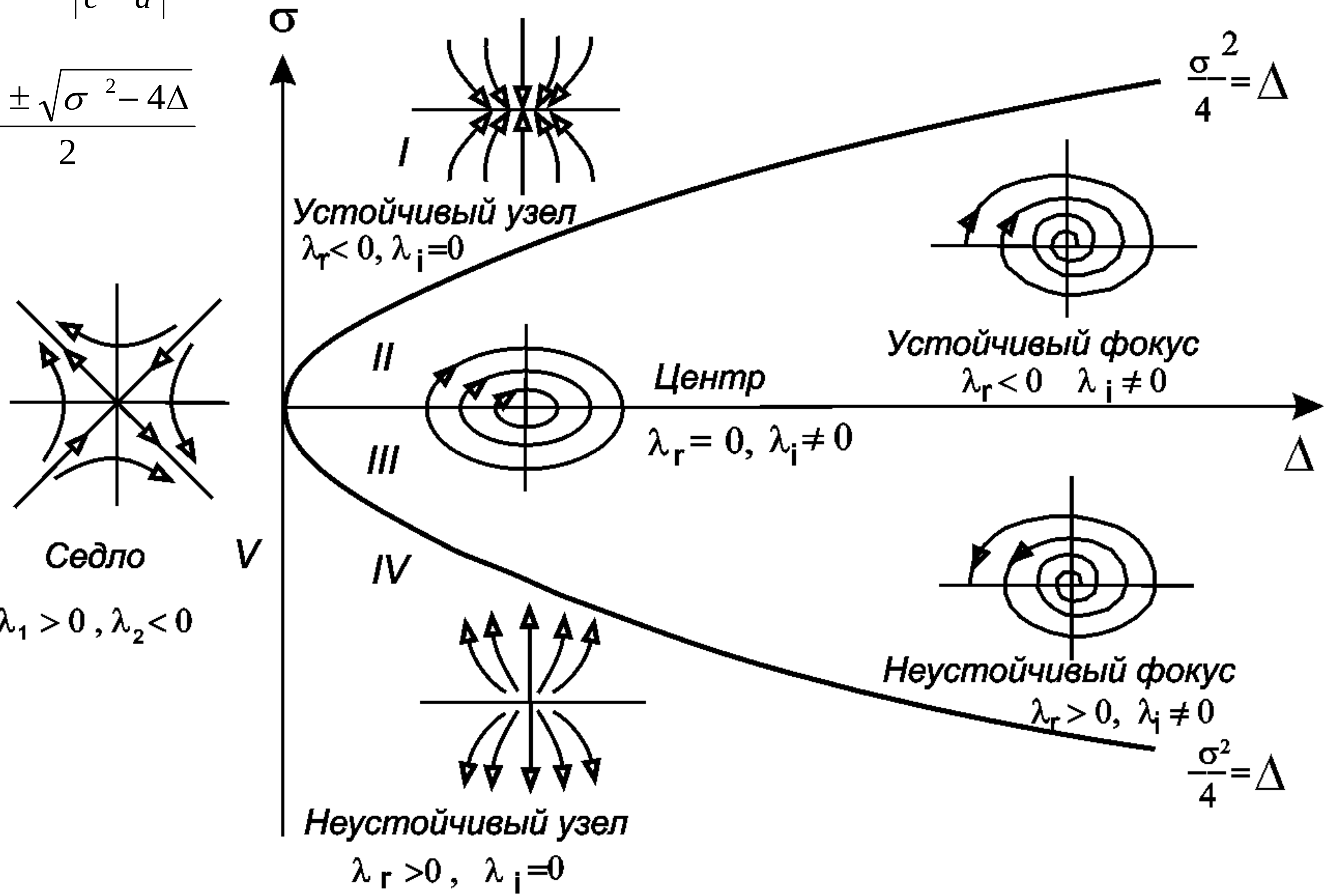
- если *хотя бы один корень* имеет ***положительную*** *действительную часть*, то есть линеаризованная система имеет нарастающие решения, то *состояние равновесия* ***неустойчиво****.*

- Если *действительные части обоих корней* характеристического уравнения *равны нулю* или если *один корень равен нулю*, *а другой отрицателен*, то *уравнения* (5.8) *не дают ответа* на вопрос об *устойчивости состояния равновесия*, и необходимо *рассматривать члены более высокого порядка малости в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений* (5.6).

Бифуркацонная диаграмма

$$\sigma = -(a+d);\ \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\qquad x=\overline{x}+\xi,$$

$$\frac{dy}{dt}=Q(x,y).\qquad y=\overline{y}+\eta.$$

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt}=a\xi+b\eta,\qquad a=P_x'(\overline{x},\overline{y}),b=P_y'(\overline{x},\overline{y}),$$

$$\frac{d\eta}{dt}=c\xi+d\eta.\qquad c=Q_x'(\overline{x},\overline{y}),d=Q_y'(\overline{x},\overline{y}).$$

Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. Elements of Physical Biology, 1925)

$$k_0 \qquad k_1 \leftarrow k_2$$

$$\longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow B$$

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$

$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$

Лотка Альфред Джеймс (англ. *Alfred James Lotka*), 1880 –1949 – американский математик, физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

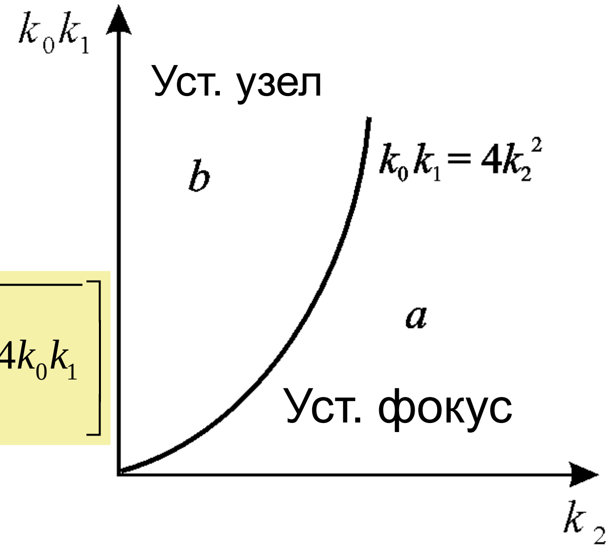
Фазовый портрет системы Лотки

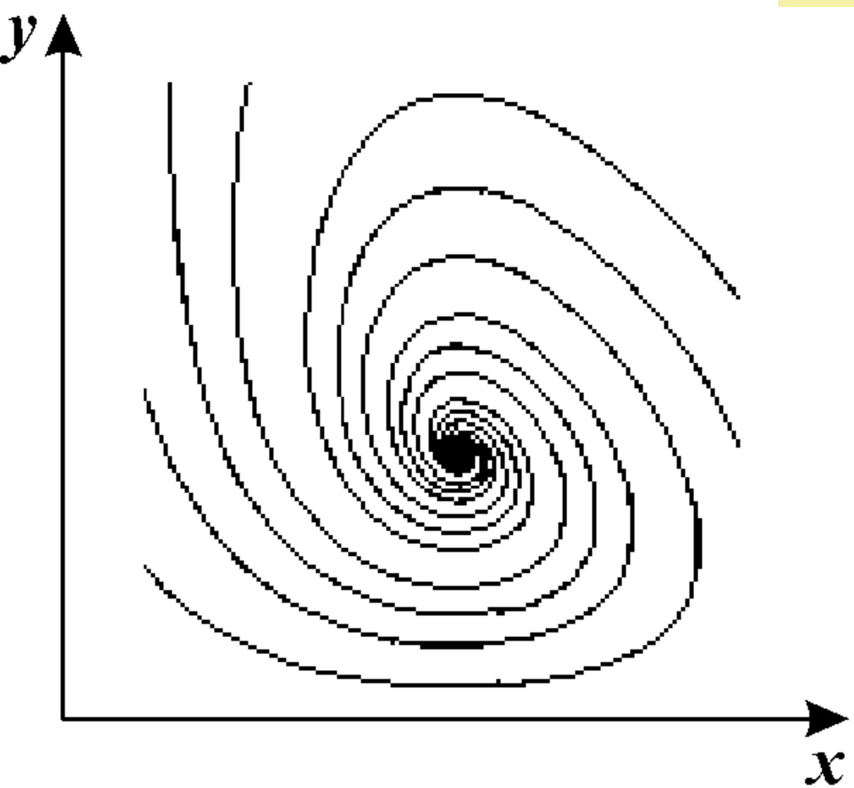
а – устойчивый фокус,

б – устойчивый узел.

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y.$$

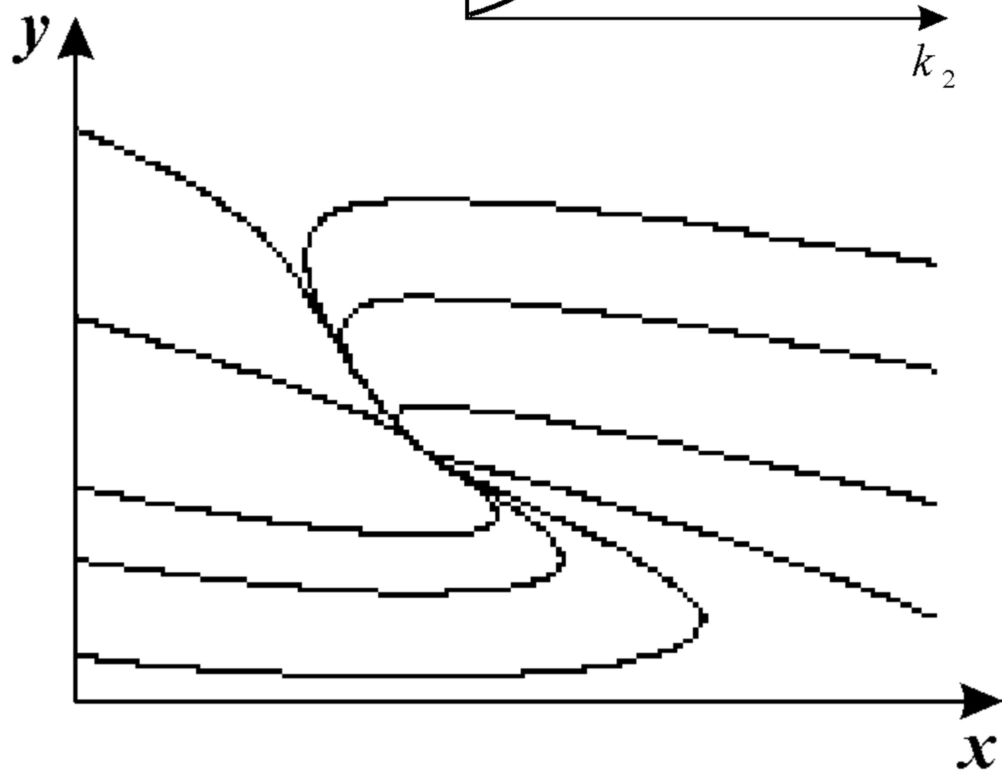
$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{k_1 k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 - 4k_0 k_1}\right]$$





а

$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$



б

$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$

Vito Volterra

Модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\delta - \gamma x).$$

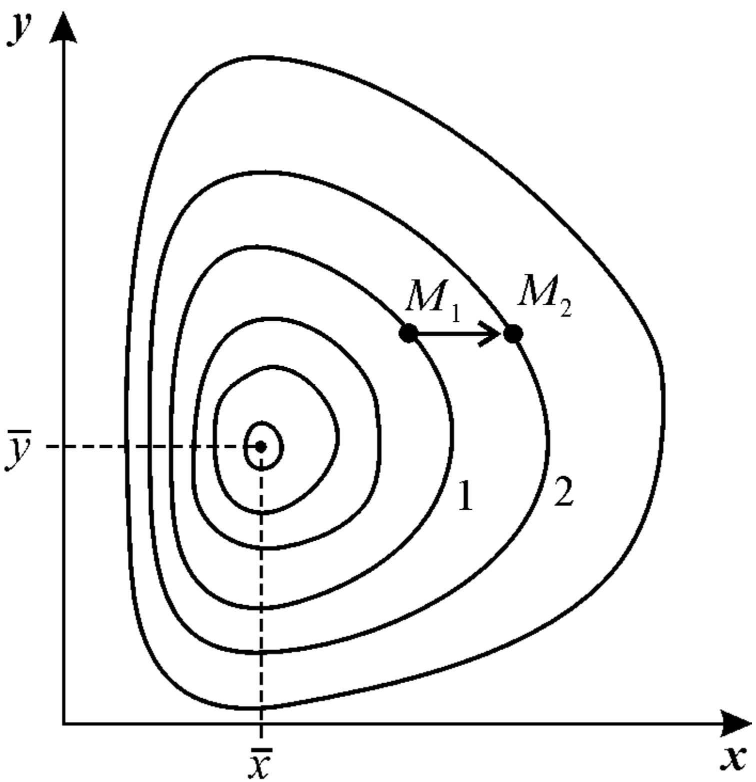
X – численность жертв
Y – численность хищников

Вольтерра Вито (1860 —1940) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

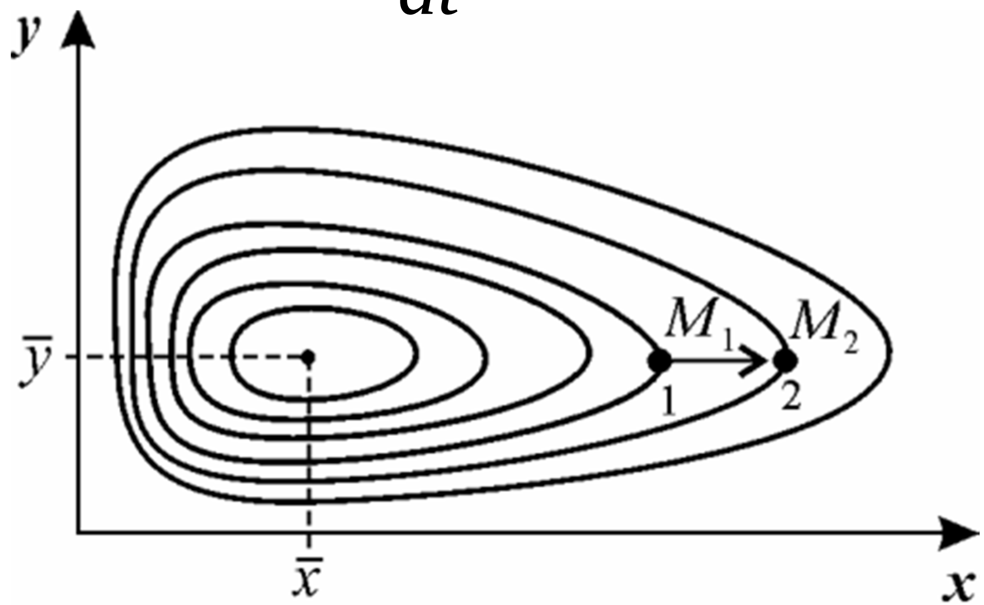
Фазовый портрет модели Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_{\text{x}} - \gamma_{\text{xy}} y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\varepsilon_{\text{y}} - \gamma_{\text{yx}} x).$$



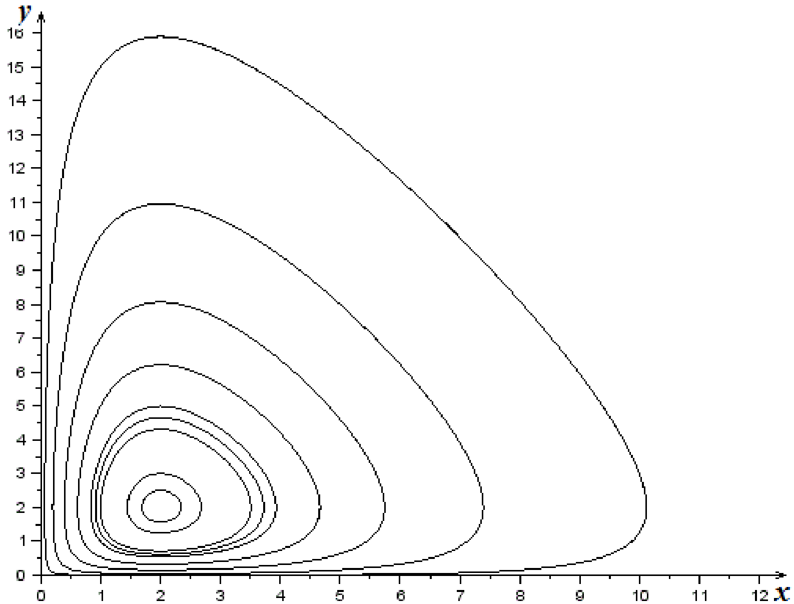
а



б

$\varepsilon_x = 4$, $\gamma_{xy} = 0{,}3$, $\varepsilon_y = \gamma_{yx} = 0{,}4$

$\varepsilon_x = 2$, $\gamma_{xy} = 0{,}3$, $\varepsilon_y = \gamma_{yx} = 0{,}4$



Volterra predator–prey model describing continuous oscillations of the population numbers.

(a) phase pattern;

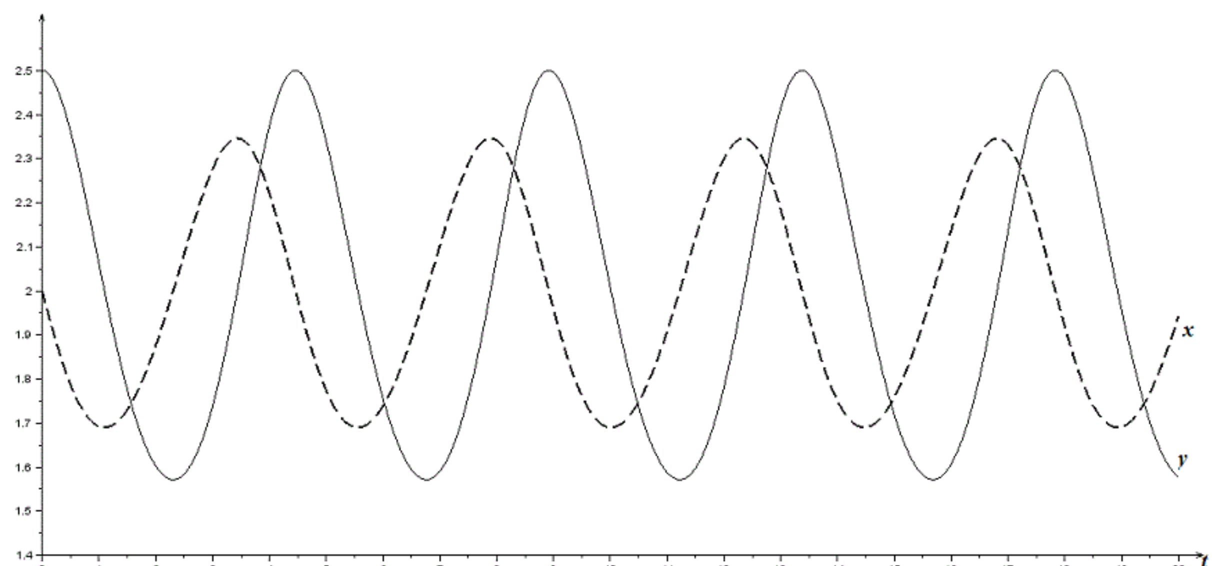
(b) dependence of the numbers of predators and preys on time.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

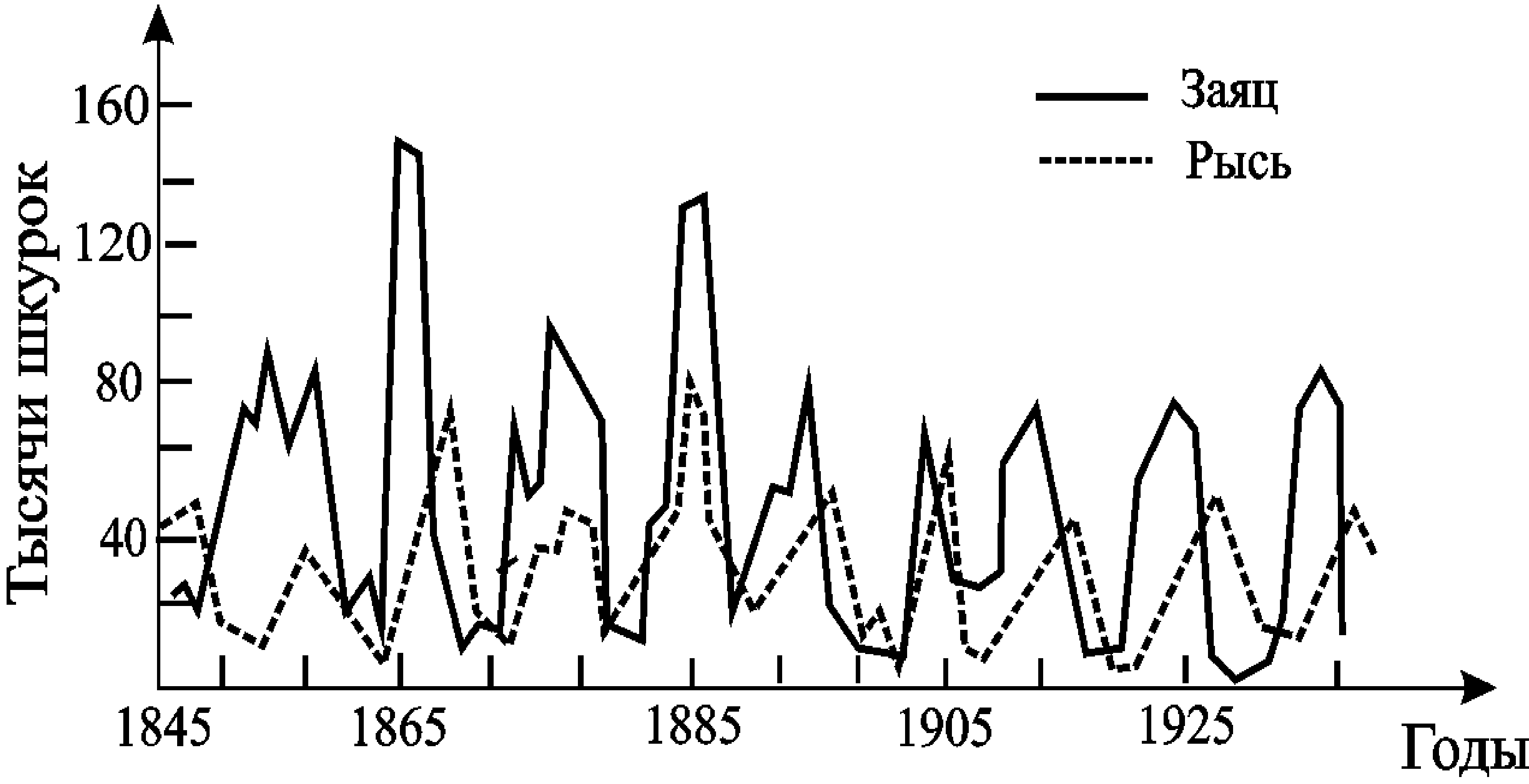
$$a = 1;\ b = 0.5;$$

$$c = 1;\ d = 2$$



Кривые численности зайца и рыси в Канаде

(по К. Вилли, В. Детье, 1974)

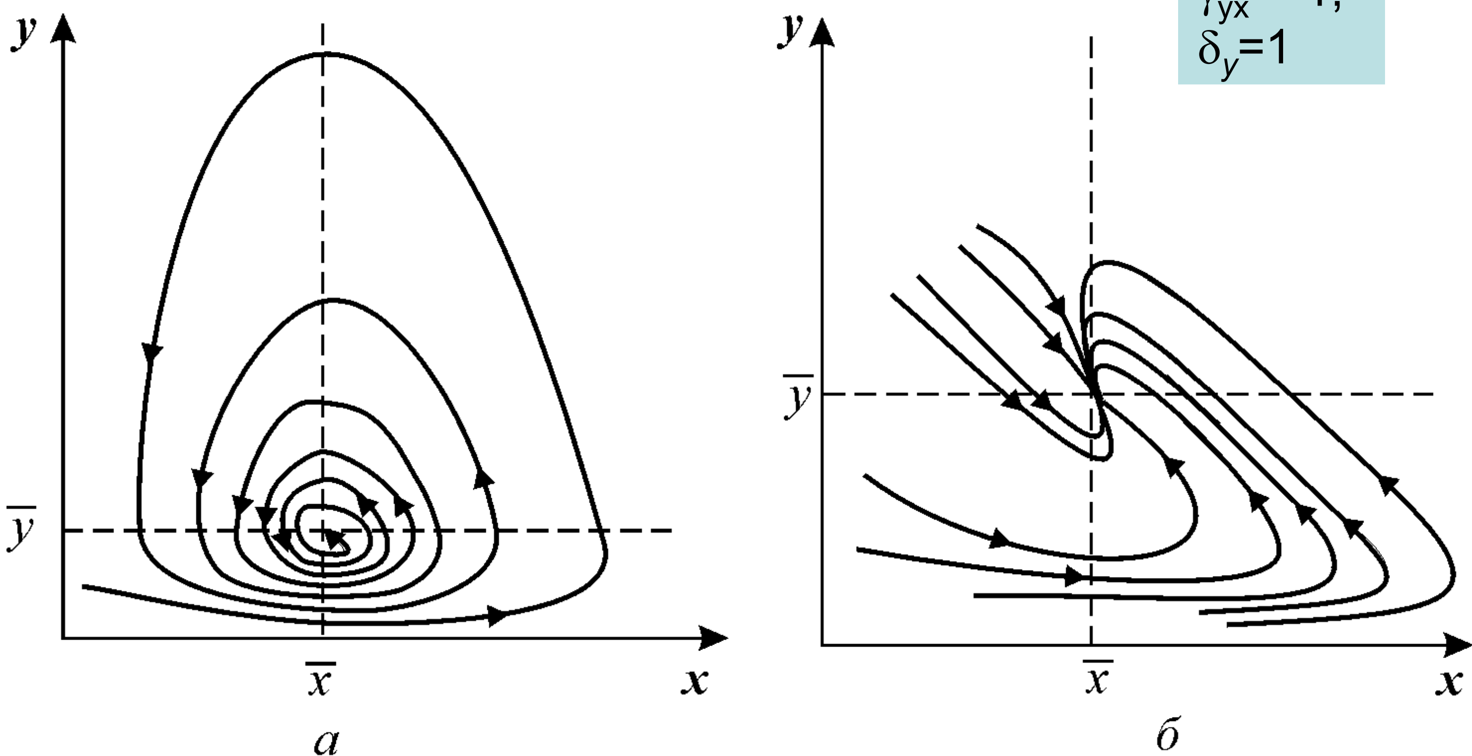


Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

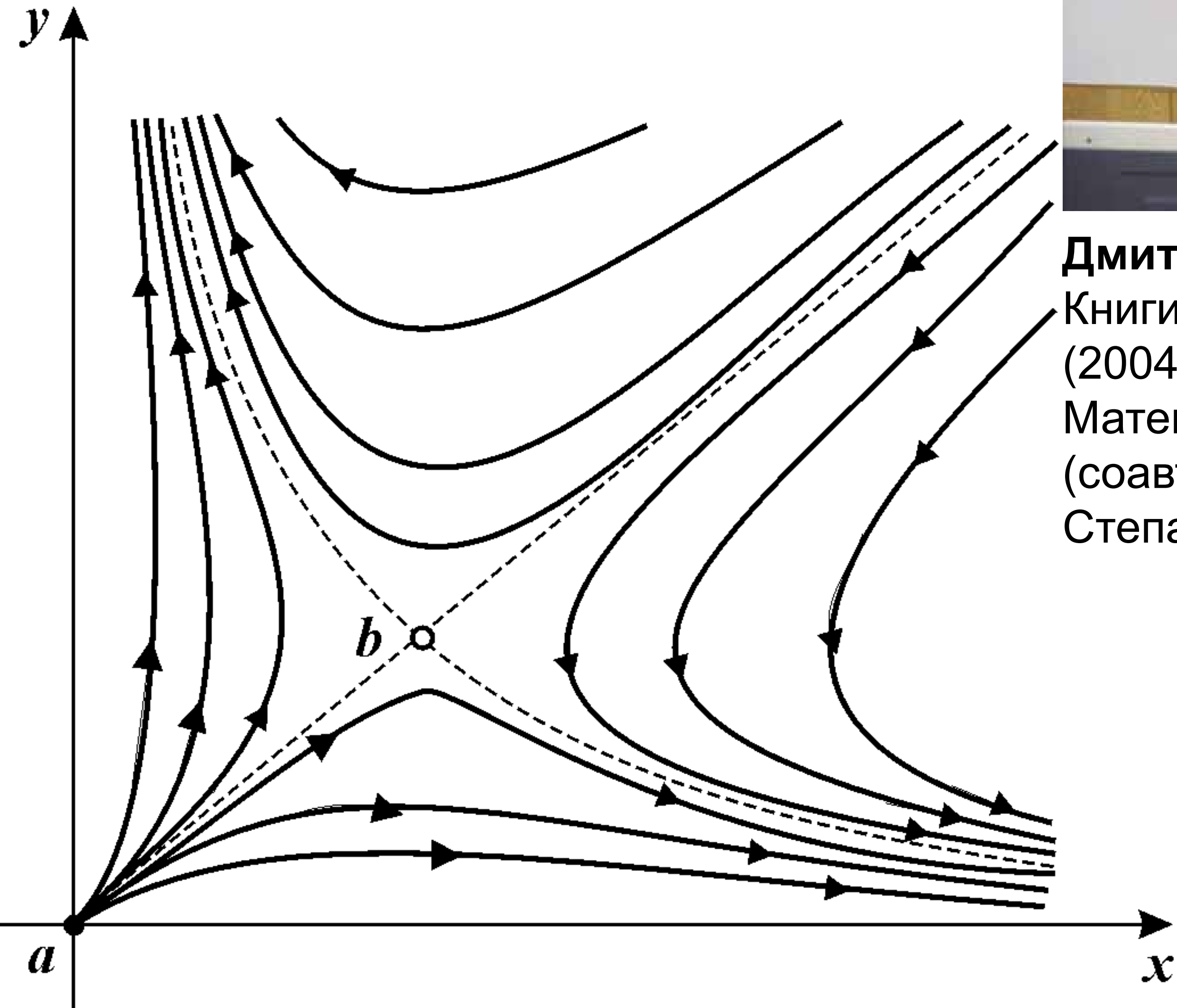
$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y - \delta_x x),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_y + \gamma_{yx} x - \delta_y y).$$

$\varepsilon_x = 2$,
$\gamma_{xy} = 1$,
$\delta_x = 1$,
$\varepsilon_y = 3$,
$\gamma_{yx} = 1$,
$\delta_y = 1$

$\varepsilon_x = 2$,
$\gamma_{xy} = 18$,
$\delta_x = 1$,
$\varepsilon_y = 3$,
$\gamma_{yx} = 5$,
$\delta_y = 1$



Отбор одного из двух равноправных (конкуренция)



Дмитрий Сергеевич Чернавский

Книги: Синергетика и информатика (2004);

Математическая биофизика (соавторы: Романовский, Степанова) 2004

$$\frac{dx}{dt} = ax - \gamma xy;$$

$$\frac{dy}{dt} = ay - \gamma xy.$$