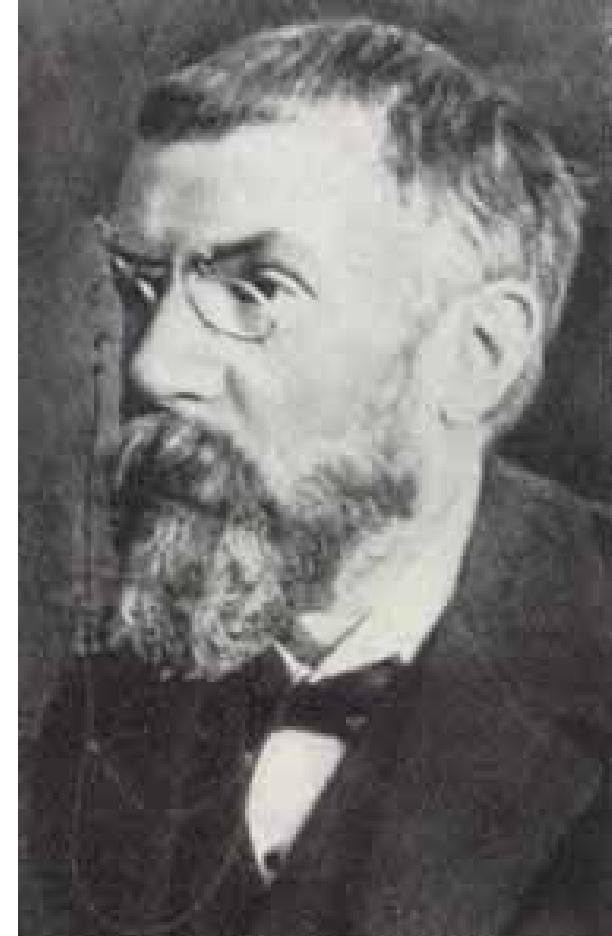
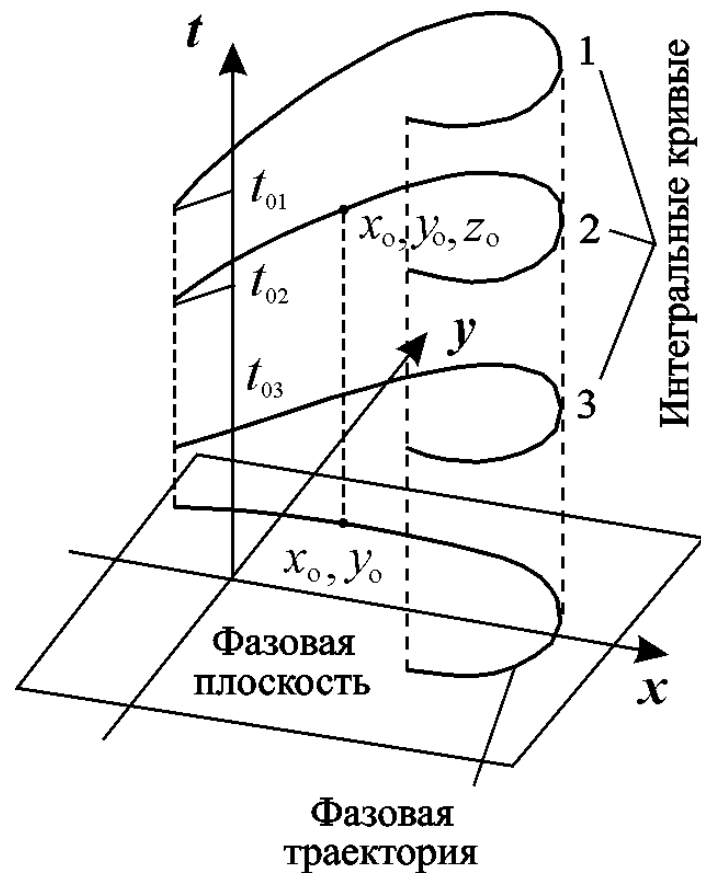


Фазовая плоскость
Качественное исследование

Анализ устойчивости
стационарного состояния
системы двух автономных
дифференциальных
уравнений

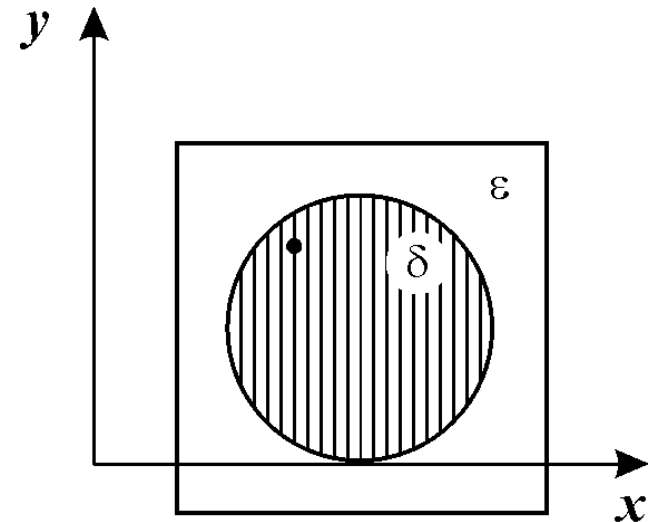
Траектории системы в пространстве (x, y, t)



Жюль Анри Пуанкаре́
(Jules Henri Poincaré)
[1854-1912](#)

Определение устойчивости

- Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ , никогда не достигнет границы ε .



Типы устойчивости стационарного состояния



$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Ляпунов Александр Михайлович ([1857](#) – 1918) – выдающийся русский [математик](#), создал [теорию устойчивости](#) состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Работал также в области [дифференциальных уравнений](#), [гидродинамики](#), [теории вероятностей](#)

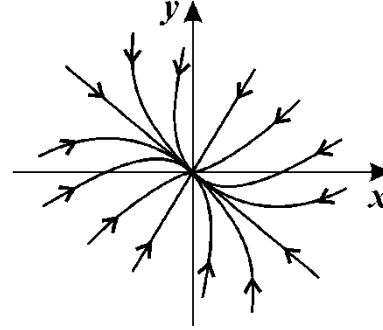
Типы поведения
фазовых траекторий в
окрестности
стационарного
состояния для
линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

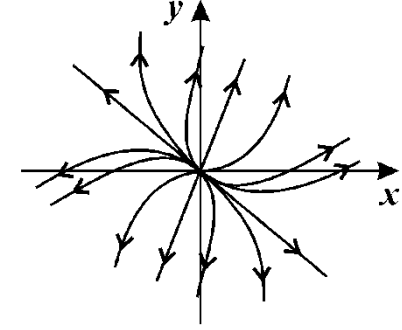
$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

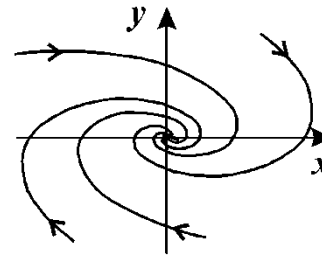
$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}{4}}$$



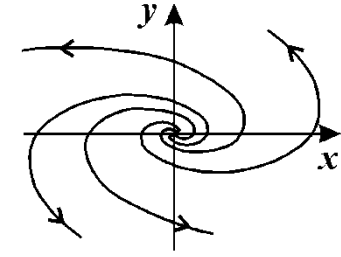
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



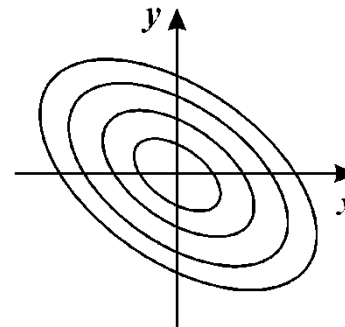
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительные)



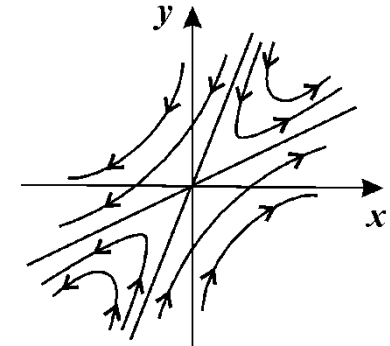
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны,
 $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны,
 $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)

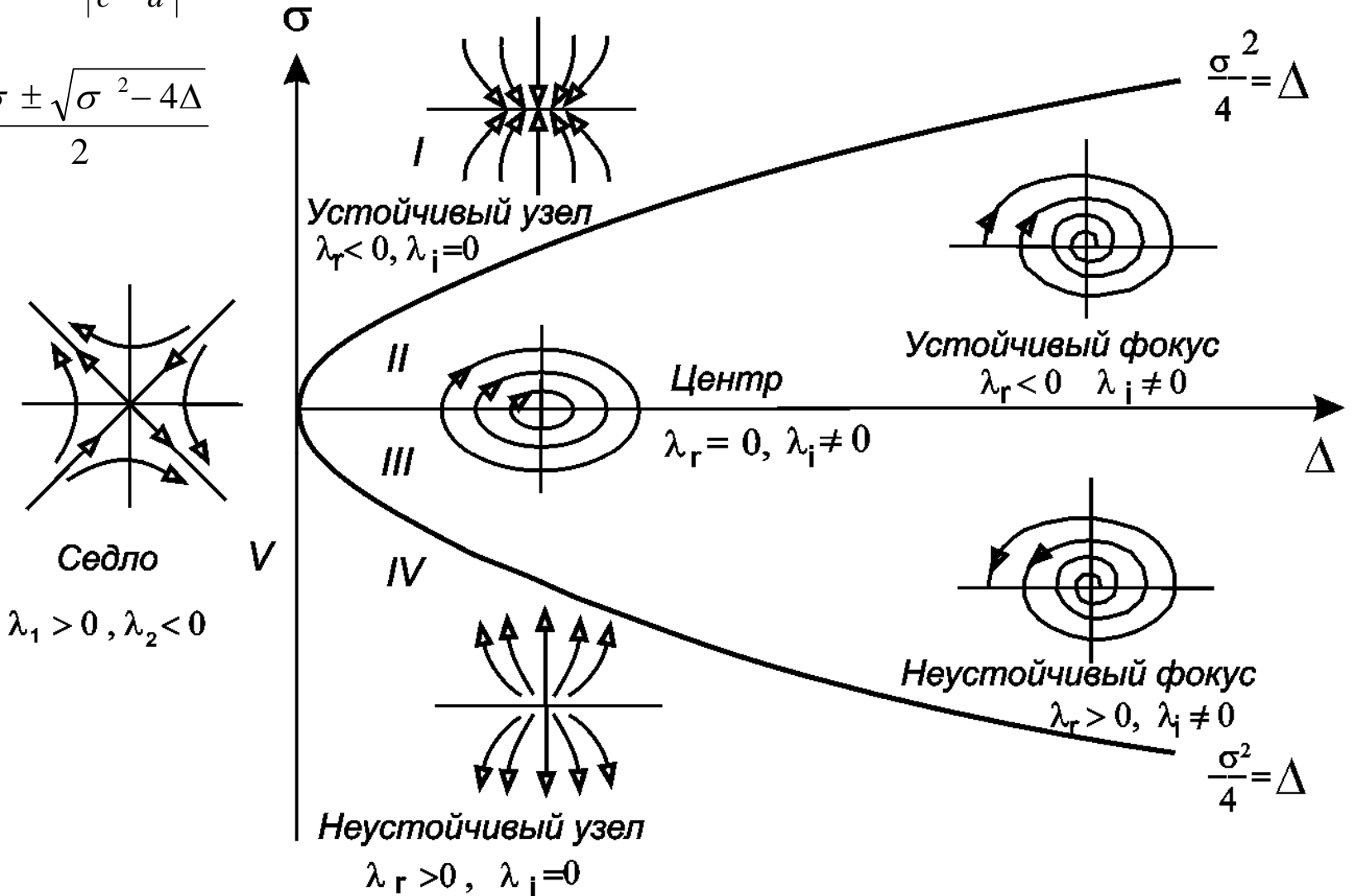


Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Бифуркационная диаграмма

$$\sigma = -(a+d); \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$x = \bar{x} + \xi,$$

$$y = \bar{y} + \eta.$$

Линеаризованная система

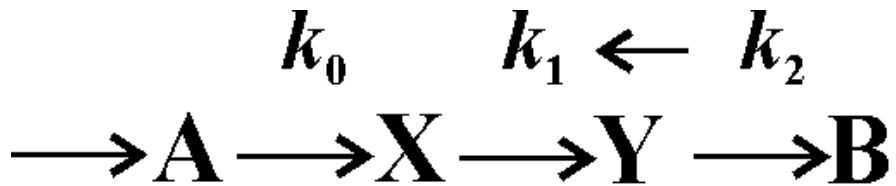
$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

$$a = P'_x(\bar{x}, \bar{y}), b = P'_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$c = Q'_x(\bar{x}, \bar{y}), d = Q'_y(\bar{x}, \bar{y}).$$

Кинетические уравнения Лотки (А.Ж. Lotka. Elements of Physical Biology, 1925)



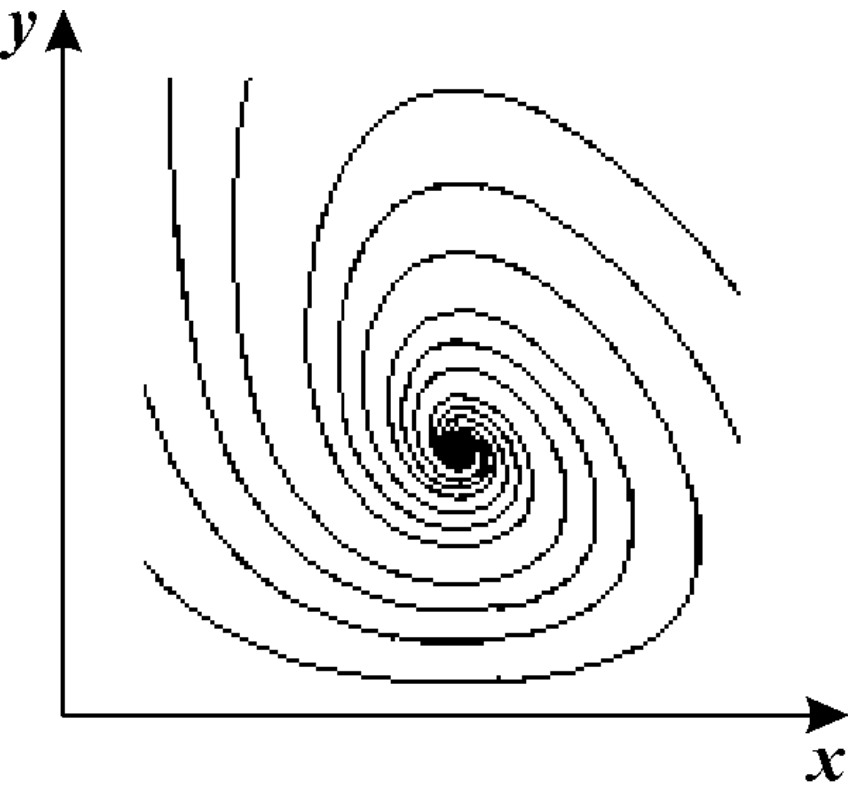
$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$
$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$



Лотка Альфред Джеймс ([англ.](#) *Alfred James Lotka*), [1880](#) – 1949 – [американский математик](#), физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

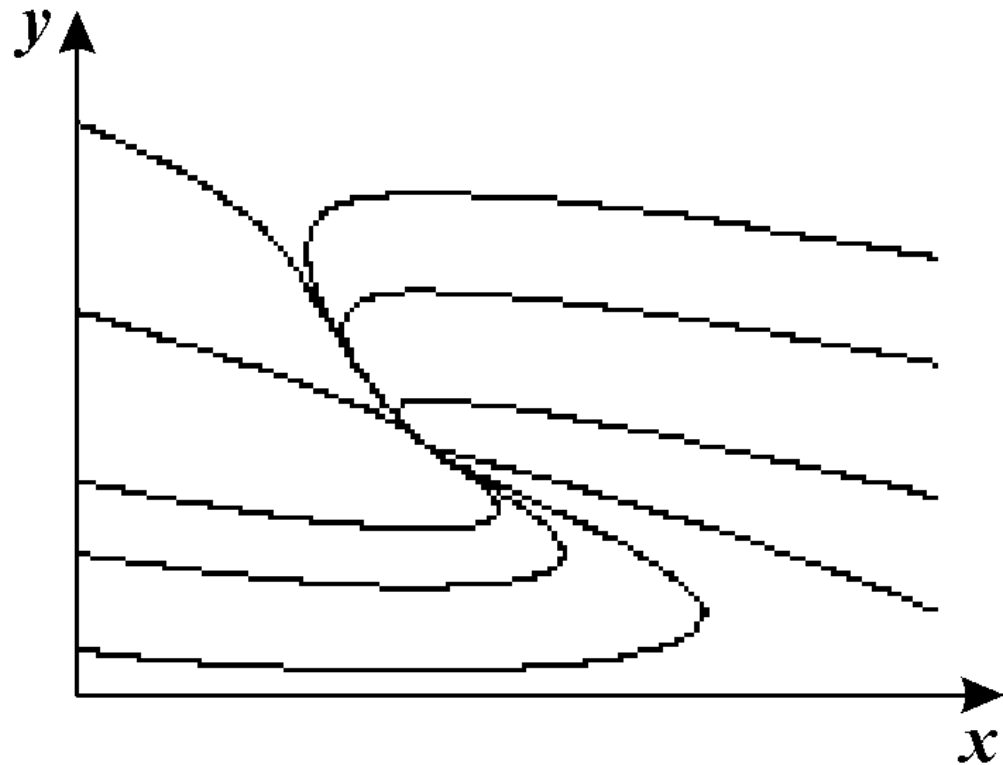
Фазовый портрет системы Лотки

a – устойчивый фокус,
б – устойчивый узел.



a

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$$



б

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$$