

Исследование одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Основные понятия (автономность)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t).$$

Обыкновенное
дифференциальное
уравнение
1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Автономное уравнение.
Правая часть не зависит
явно от t

Переменные и параметры

$$\frac{dx}{dt} = ax + bxy + dx \sin wt$$

x, t – переменные

a, b, d, w – параметры

Стационарное состояние

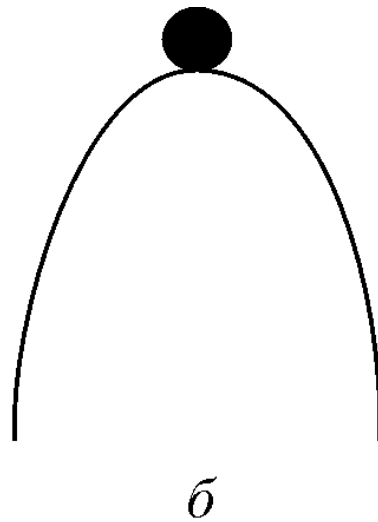
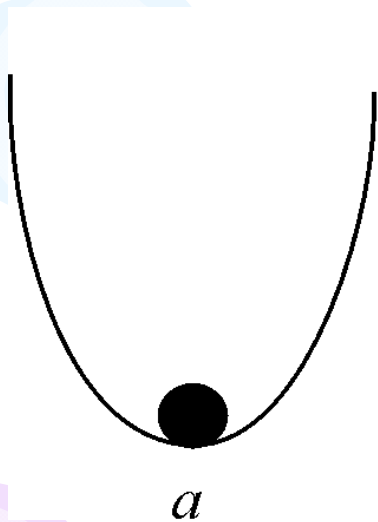
$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\bar{x}} = 0$$

Скорость изменения
переменной x
равна нулю

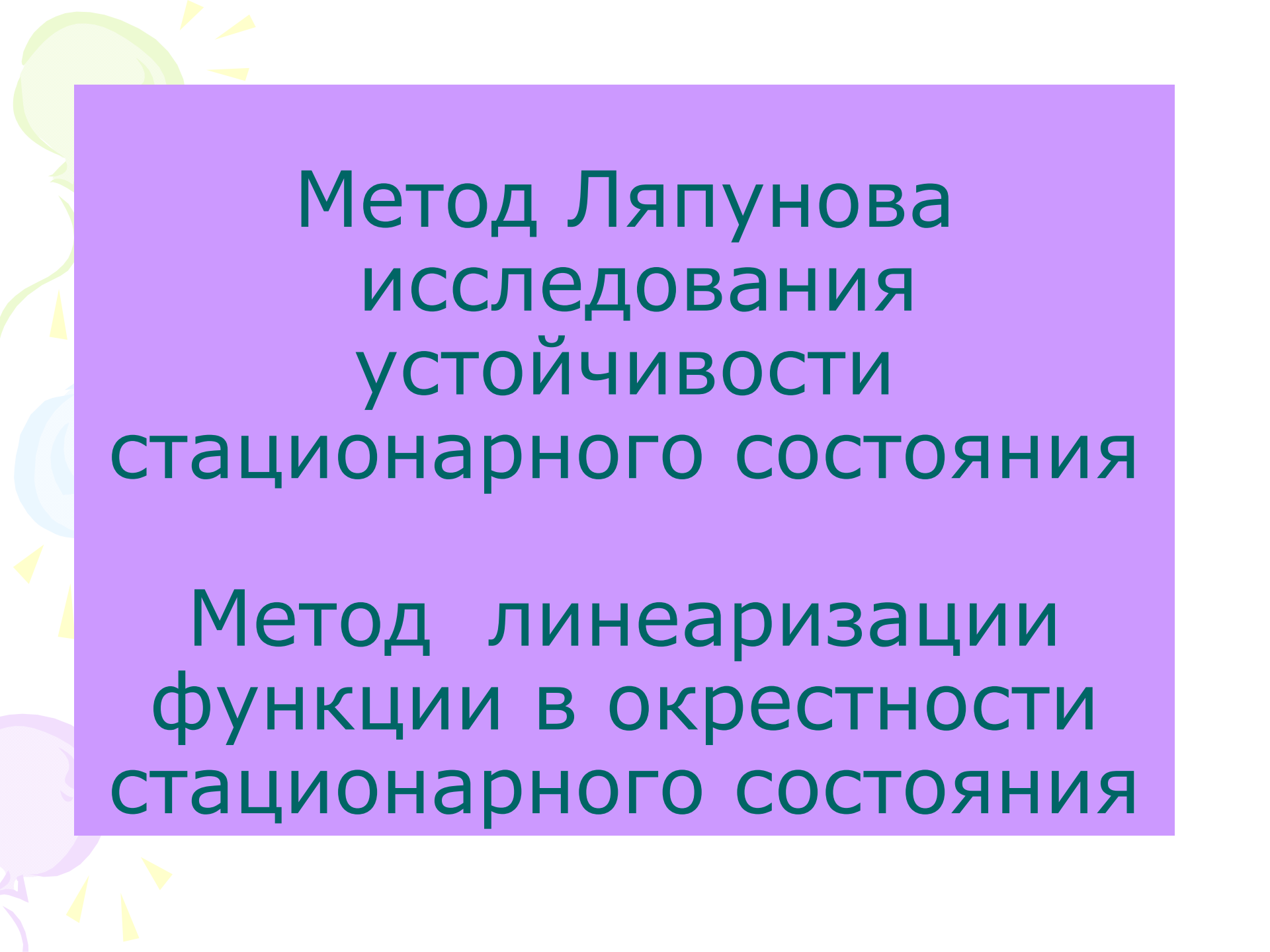
$$f(\bar{x}) = 0$$

Правая часть
уравнения
равна нулю

Устойчивость стационарного состояния



Стационарное
состояние
устойчиво, если
малые отклонения
с течением
времени остаются
малыми



Метод Ляпунова
исследования
устойчивости
стационарного состояния

Метод линеаризации
функции в окрестности
стационарного состояния

Выразим переменную x
через отклонение от
стационарного значения:

$$x = \bar{x} + \xi \quad \xi / \bar{x} \ll 1$$

$$\frac{d(\bar{x} + \xi)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(\bar{x} + \xi)$$

Правую часть разложим в
ряд

Тейлора в точке \bar{x}

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\xi + \frac{1}{2}f''(\bar{x})\xi^2 + \dots$$

Брук Тэйлор (1685-1731)

- Английский математик, музыкант, живописец, философ.

Формула Тэйлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n$$

Значение функции $f(x)$ в точке x в окрестности точки a выражается в виде степенного ряда



Отбросим члены более
высокого порядка.
Получим
линеаризованное
уравнение:

$$d\xi / dt = a_1 \xi,$$

Решение линеаризованного уравнения

$$\xi(t) = c \cdot \exp(\lambda t)$$

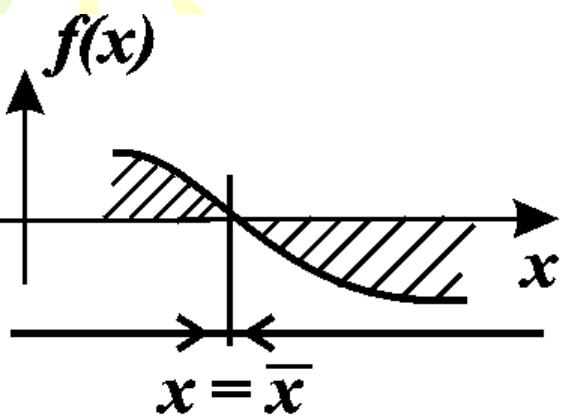
$$\lambda = a_1 = f'(\bar{x})$$

c – произвольная постоянная. $c = \xi(0)$

Метод Ляпунова

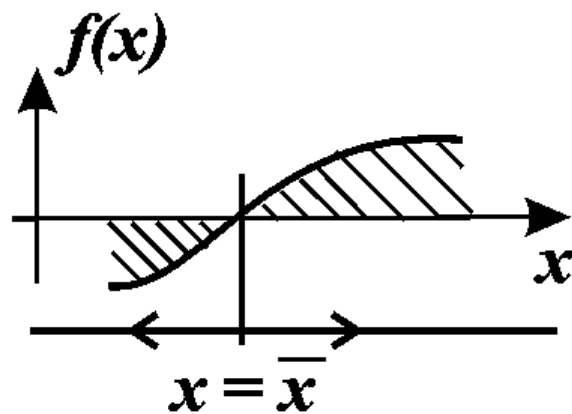
Устойчивость стационарного состояния уравнения $dx/dt=f(x)$ определяется знаком производной правой части в стационарной точке. Если эта производная равна нулю, требуется рассмотрение в разложении $f(x)$ членов более высокого порядка

Графический метод анализа устойчивости стационарного состояния



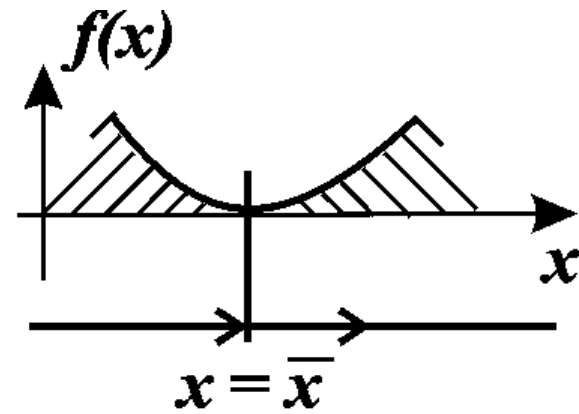
a

устойчиво



б

неустойчиво



в

неустойчиво

Типы аттракторов

- *Устойчивая точка покоя*
- *Предельный цикл — режим колебаний с постоянными периодом и амплитудой (начиная с размерности системы 2)*
- *Области с квазистохастическим поведением траекторий в области аттрактора, например, «странный аттрактор» (начиная с размерности 3)*