

**Математические модели в
морфогенезе.
Модель морфогенеза
эпителиальных пластов
Б.Н.Белинцева**

Математические модели в эмбриогенезе

Химико-кинетические:

- Модель Тьюринга
- Модель Гигера-Мейнхардта

Морфомеханические:

- Модель Харриса
- Модель Белинцева

Модель Гигера-Мейнхардта

активатор a
ингибитор h

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \rho + C \frac{a^2}{h} - \mu a - D_a \frac{\partial^2 a}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu a^2 - \sigma h + D_h \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}$$

ρ — базовая составляющая скорости синтеза активатора;

$C \frac{a^2}{h}$ — нелинейный член, описывающий квадратичный автокатализ того же морфогена;

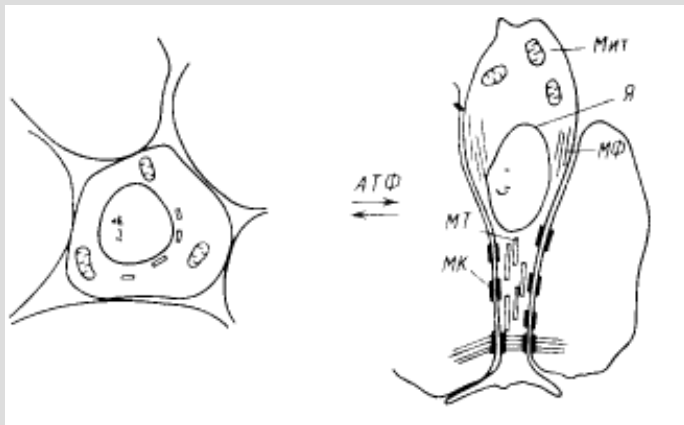
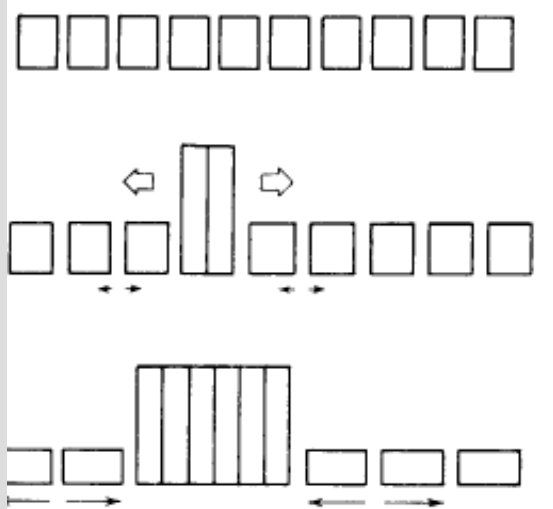
μa — нелинейный член, описывающий спонтанный распад морфогена;

последние члены описывают одномерную диффузию по пространству организма соответственно активатора и ингибитора, причем $D_h \gg D_a$; Ингибитор катализируется активатором согласно реакции второго порядка (νa^2), спонтанно распадается (σh) и быстро диффундирует по системе.

Модель Гигера-Мейнхардта

- Исходные условия модели:
 - 1) Или плавное градиентное распределение активатора или плавное равномерное распределение вдоль организма при хотя бы одной локальной флуктуации активатора;
 - 2) $D_h \gg D_a$

Модель Белинцева



Модель основана на следующих эмпирических данных:

- Эпителиальный пласт имеет фиксированные (неподвижные) границы, которые не меняются при деформациях внутри пласта.
- Клетка имеет два устойчивых состояния: релаксированное, соответствующее изотропной форме, и морфологически поляризованное.
- Клетки в составе очага локальной поляризации оказывают близкодействующее стимулирующее воздействие на соседние неполяризованные клетки (контактная поляризация) и дальнедействующее подавляющее на клетки вне области очага поляризации.

Модель Белинцева

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = f(p_i) + D_x \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} - k\varepsilon(\langle p \rangle - p_i) - kT,$$

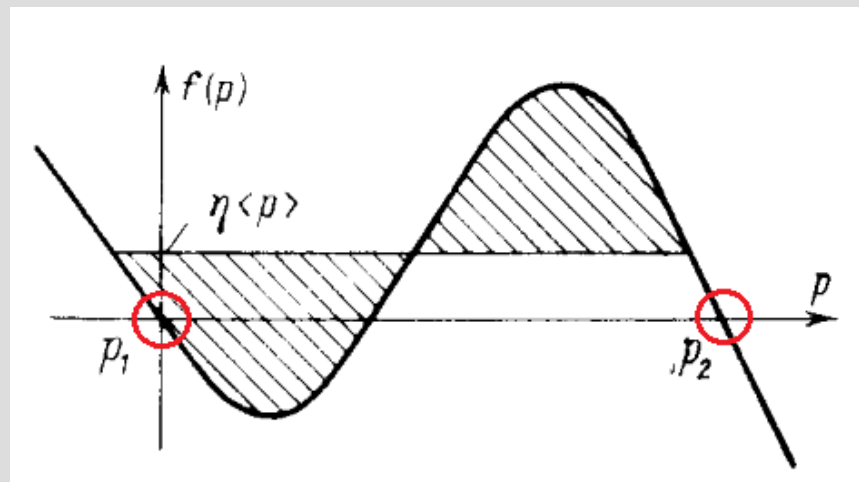
$f(p_i)$ — кубический член, отражающий бистабильность режима функционирования клеточной системы

D_x — коэффициент диффузии (коэффициент переноса поляризации).

$\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2}$ — вторая производная коэффициента поляризации клетки по пространственной координате

$-k\varepsilon(\langle p \rangle - p_i)$ — наличие процессов самоорганизации

$-kT$ — сила упругого натяжения внешнего происхождения.

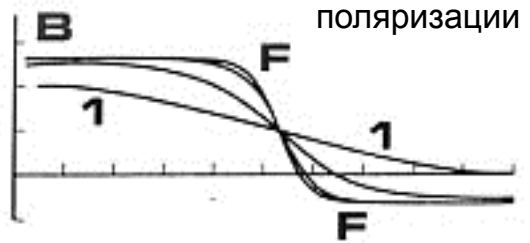


Режимы модели Белинцева

Движение волны поляризации
в отсутствие упругой реакции



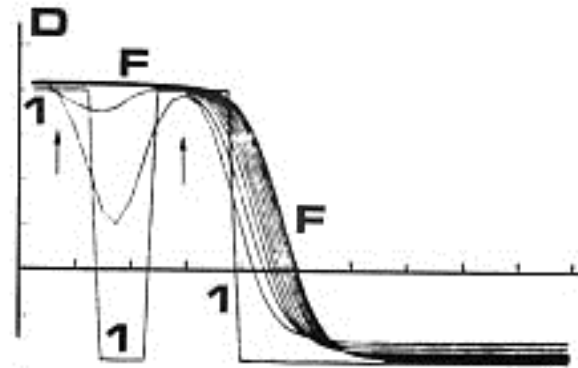
Начальное условие – градиент
поляризации



Начальное условие –
одно локальное
возмущение



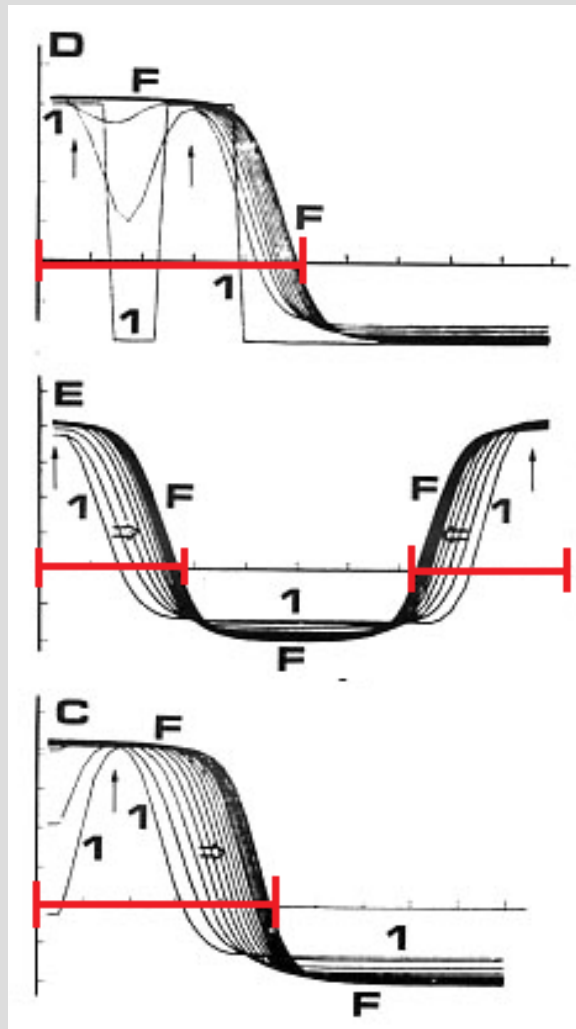
Начальное возмущение – два
локальных возмущения



Возмущения с разных
концов



Режимы модели Белинцева



Система обладает *масштабной инвариантностью* («скэйлинг»): отношение длины поляризованного домена к длине растянутых участков постоянно для фиксированных значений параметров, вне зависимости от абсолютного значения длины поляризованного домена. В модели Тьюринга её нет.