

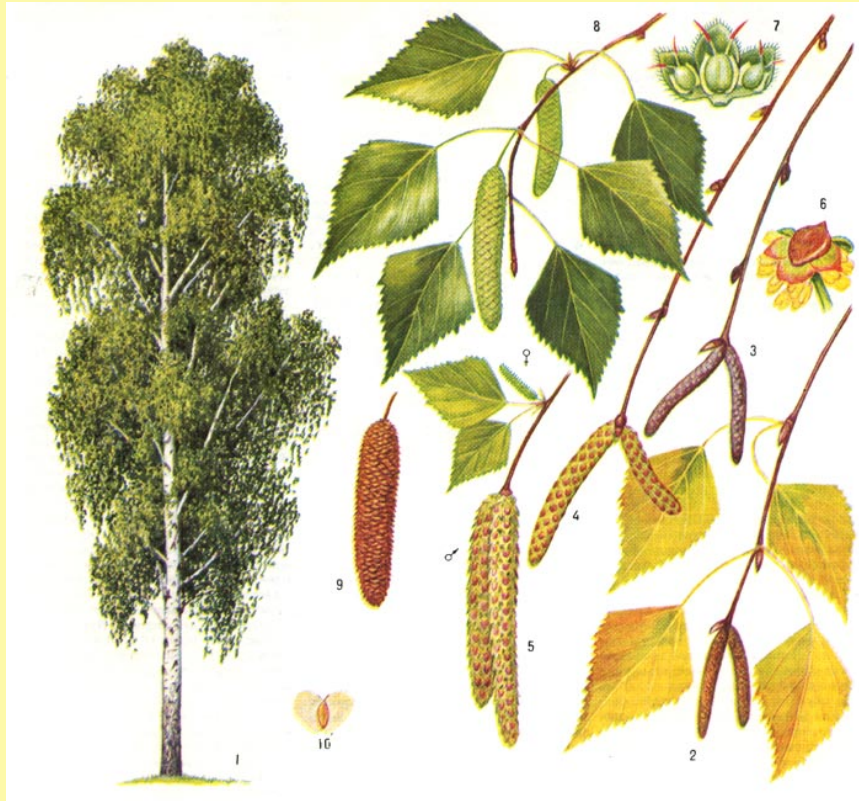
Нелинейные матричные модели конкуренции популяций в геоботанике



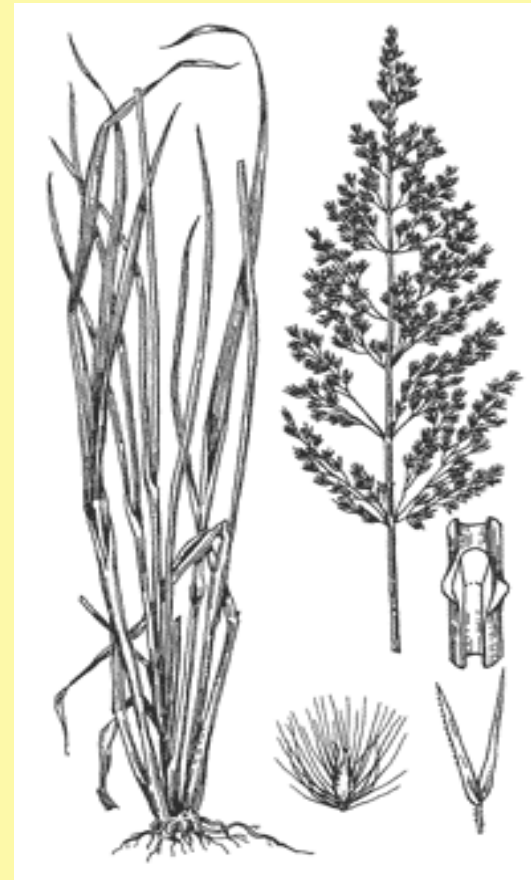
По статье Н.Г. Улановой «О конкуренции среди популяций
с дискретной структурой: матричная модель
взаимодействия популяций вейника и берёзы, растущих
совместно.»

Выполнил: Андрей Каплевский,
студент 2 курса каф.
Геоботаники (гр. 208)

Виды, для которых описано взаимодействие



Betula pendula Roth



Calamagrostis Epigeios (L.) Roth

Описание возрастной структуры популяций вейника и берёзы

$$x(t+1) = Lx(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

$$w(t) = [im^1, v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, g_1^2, g_1^3, g_2^2, g_3^3, g_3^4, \\ ss^2, ss^3, ss^4, ss^5, ss^6, s^3, s^4]^T,$$

$$b(t) = [p^1, j^1, j^2, j^3, im_1^3, im_1^4, im_1^5, im_1^6, \\ v_1^5, v_1^6, v_1^7, v_1^8, v_1^9, v_1^{10}, v_2^8, v_2^9, v_2^{10}]^T,$$

Верхний индекс – возраст

Проекционная матрица для берёзы

$$L_b = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ b_1 & b_2 & 0 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & & & & & & 0 & & & & & & & \\ & 0 & 0 & b_5 & b_6 & 0 & & & & & & & & & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & b_7 & 0 & & & & & & & & & & & \\ & & & 0 & b_8 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & \\ & & & & 0 & b_9 & 0 & b_{10} & 0 & & & & & & & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & b_{11} & 0 & & & & & & & & \\ & & & & & & 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ & & & & & & & 0 & b_{13} & 0 & b_{14} & 0 & & & & & & \\ & & & & & & & & 0 & b_{15} & 0 & b_{16} & 0 & & & & & \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & b_{17} & 0 & & & & \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & b_{18} & 0 & & & \\ & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & b_{19} & 0 & & \\ & & & & & & & & & & & & b_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & & & & & & b_{21} & 0 & 0 & b_{22} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & b_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Проекционная матрица для вейника

$$L_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & c_4 & c_5 & 0 & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 & 0 & & & & & & & & & & & & 0 \\ 0 & c_7 & c_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & c_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & c_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12} & 0 & & & & & & & \\ 0 & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & c_{14} & c_{15} & c_{16} & 0 & 0 & c_{17} & c_{18} & c_{19} & 0 & 0 & c_{20} & 0 & & & & & \\ 0 & c_{21} & 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{23} & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{25} & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{26} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Состав агрегированных групп

$$R = im^1 + v^1 + v^2 + v^3 + v^4 + g_1^2 + g_1^3 + g_2^2$$

R – репродуктивная подгруппа
вейника

$$P = v^5 + g_3^3 + g_3^4 + \\ + ss^2 + ss^3 + ss^4 + ss^5 + ss^6 + s^3 + s^4.$$

P – пострепродуктивная
подгруппа вейника

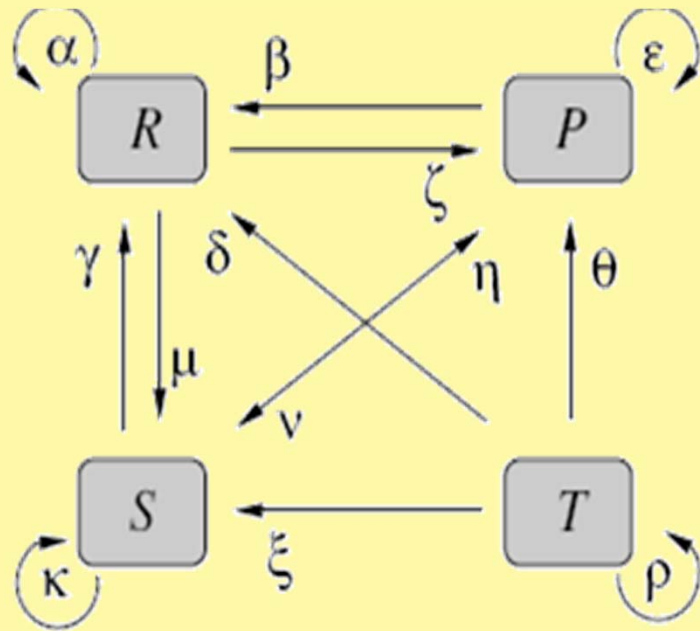
$$S = p^1 + j^1 + j^2 + j^3 + im_1^3 + im_1^4 + im_1^5 + im_1^6,$$

S – кустарникообразные формы
берёзы (низкорослые)

$$T = v_1^5 + v_1^6 + v_1^7 + v_1^8 + v_1^9 + v_1^{10} + \\ + v_2^8 + v_2^9 + v_2^{10}.$$

T – молодые деревья берёзы

Структура теоретически возможных взаимодействий между агрегированными группами популяций вейника и берёзы.



R – репродуктивная подгруппа вейника

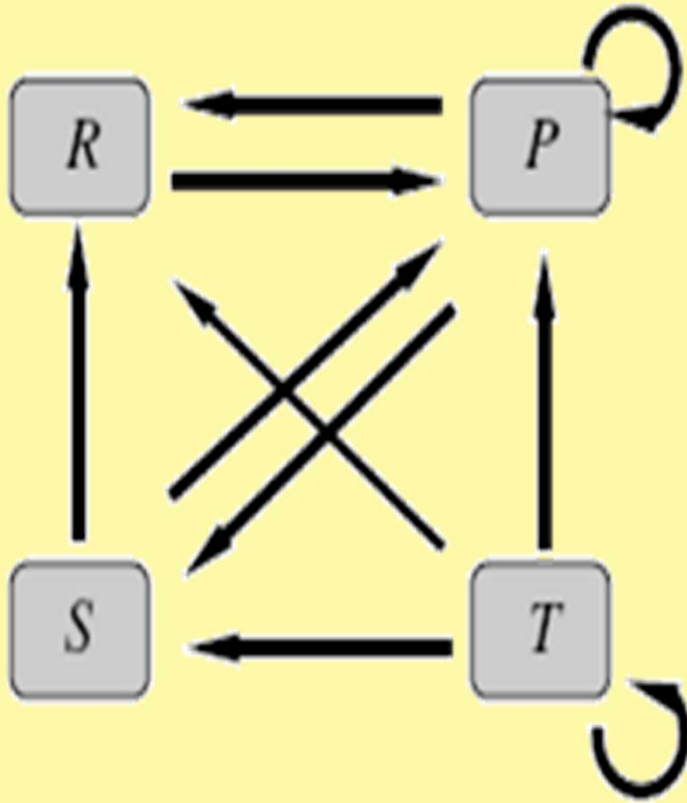
P – пострепродуктивная подгруппа вейника

S – кустарникообразные формы берёзы (низкорослые)

T – молодые деревья берёзы

Буквенные коэффициенты-параметры интенсивности взаимодействий

Фактически реализованные взаимодействия



Толщина стрелок фактически реализованных влияний (в логарифмическом масштабе) соответствует количественному значению параметра

Модельная система уравнений:

$I(t)$ и $J(t)$ – семенное размножение вейника и берёзы в начальный момент времени

$$\begin{aligned} R(t+1) &= [I(t) + R(t)]p(1-c)f_1(R(t), P(t), S(t), T(t)), \\ P(t+1) &= R(t)pcf_1(R(t), P(t), S(t), T(t)) + \\ &\quad + P(t)sf_2(R(t), P(t), S(t), T(t)), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} S(t+1) &= [J(t) + S(t)]d(1-b)f_3(R(t), P(t), S(t), T(t)), \\ T(t+1) &= S(t)bdf_3(R(t), P(t), S(t), T(t)) + qT(t)f_4(T(t)), \end{aligned}$$

Векторно-матричная форма полученной системы уравнений

$$\mathcal{X}(t+1) = \mathcal{A}(\mathcal{X}(t))\mathcal{X}(t), \quad (10)$$

где $\mathcal{X}(t) = [R(t), P(t), S(t), T(t)]^T$ – вектор агрегированной структуры сообщества вейник-береза, а $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ – матрица 4×4 , элементы которой суть соответствующие функции из системы (9), т.е. $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ – нелинейный матричный оператор.

$$\mathcal{A}([0, 0, 0, 0]) = \begin{bmatrix} p(1-c) & 0 & 0 & 0 \\ pc & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d(1-b) & 0 \\ 0 & 0 & ab & q \end{bmatrix}, \quad (11)$$

Нелинейная модификация модели

$$\mathcal{A}(\mathcal{X}) = \mathcal{A}([0, 0, 0, 0]) / (1 + k|\mathcal{X}|),$$

где $|\mathcal{X}|$ означает норму вектора $\mathcal{X}$ по сумме модулей компонент, k – параметр калибровки.

Модель, после нелинейной модификации

$$R(t+1) = [I(t) + R(t)] \frac{p(1-c)}{(1+\alpha R(t))(1+\beta P(t))(1+\gamma S(t))(1+\delta T(t))},$$

$$P(t+1) = \frac{R(t)pc}{(1+\alpha R(t))(1+\beta P(t))(1+\gamma S(t))(1+\delta T(t))} + \\ + \frac{P(t)s}{(1+\zeta R(t))(1+\varepsilon R(t))(1+\eta R(t))(1+\theta R(t))},$$

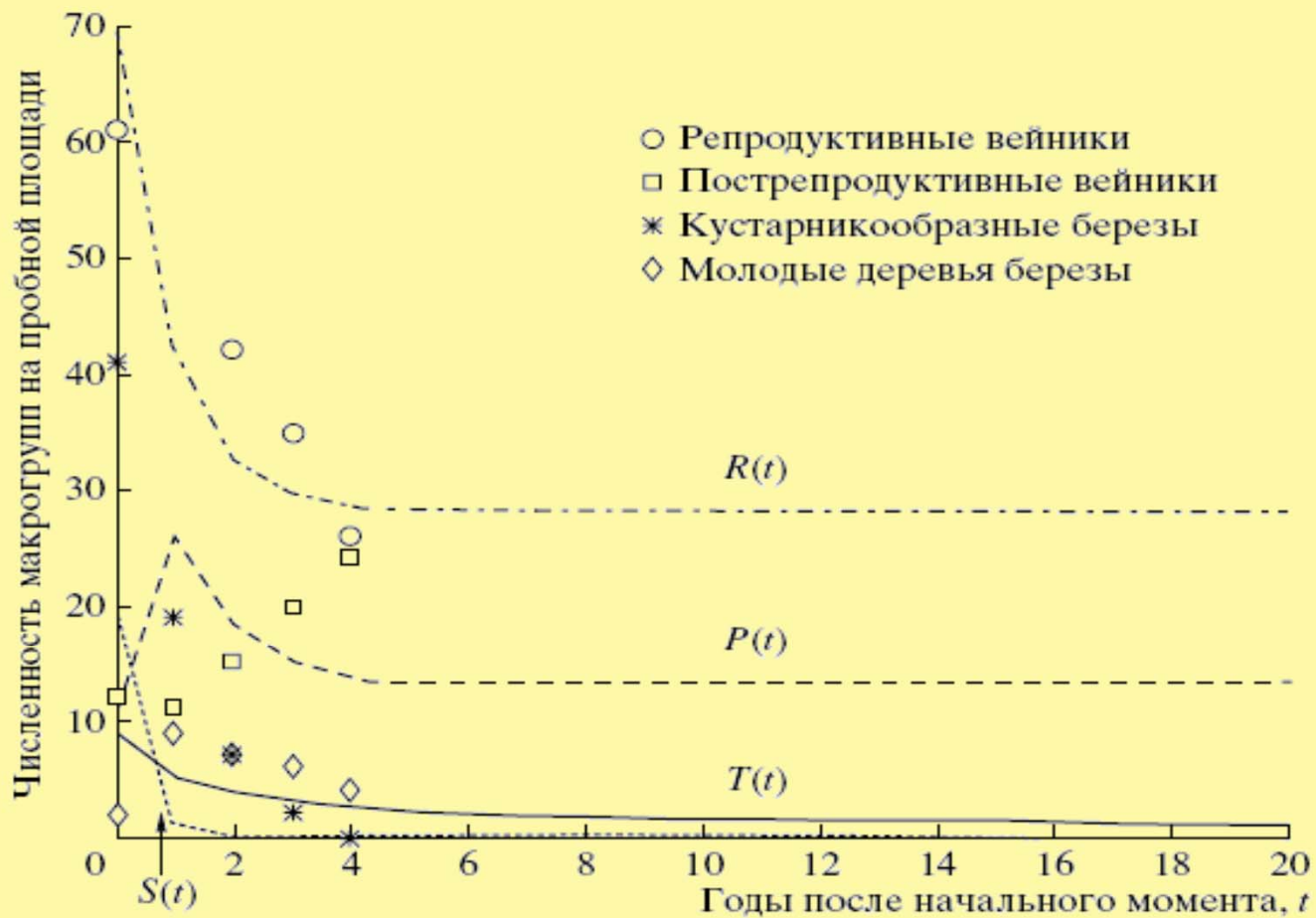
$$S(t+1) = [J(t) + S(t)] \frac{d(1-b)}{(1+\kappa R(t))(1+\mu R(t))(1+\nu R(t))(1+\xi R(t))},$$

$$T(t+1) = \frac{S(t)db}{(1+\kappa R(t))(1+\mu R(t))(1+\nu R(t))(1+\xi R(t))} + \frac{T(t)q}{1+\rho T(t)},$$

Калибровка параметров

- Калибровка (определение значений параметров) проводится за счёт подстановки в уравнения системы значений, полученных экспериментально.
- Получение большого количества калибровочных уравнений обеспечивается наличием нескольких экспериментальных точек

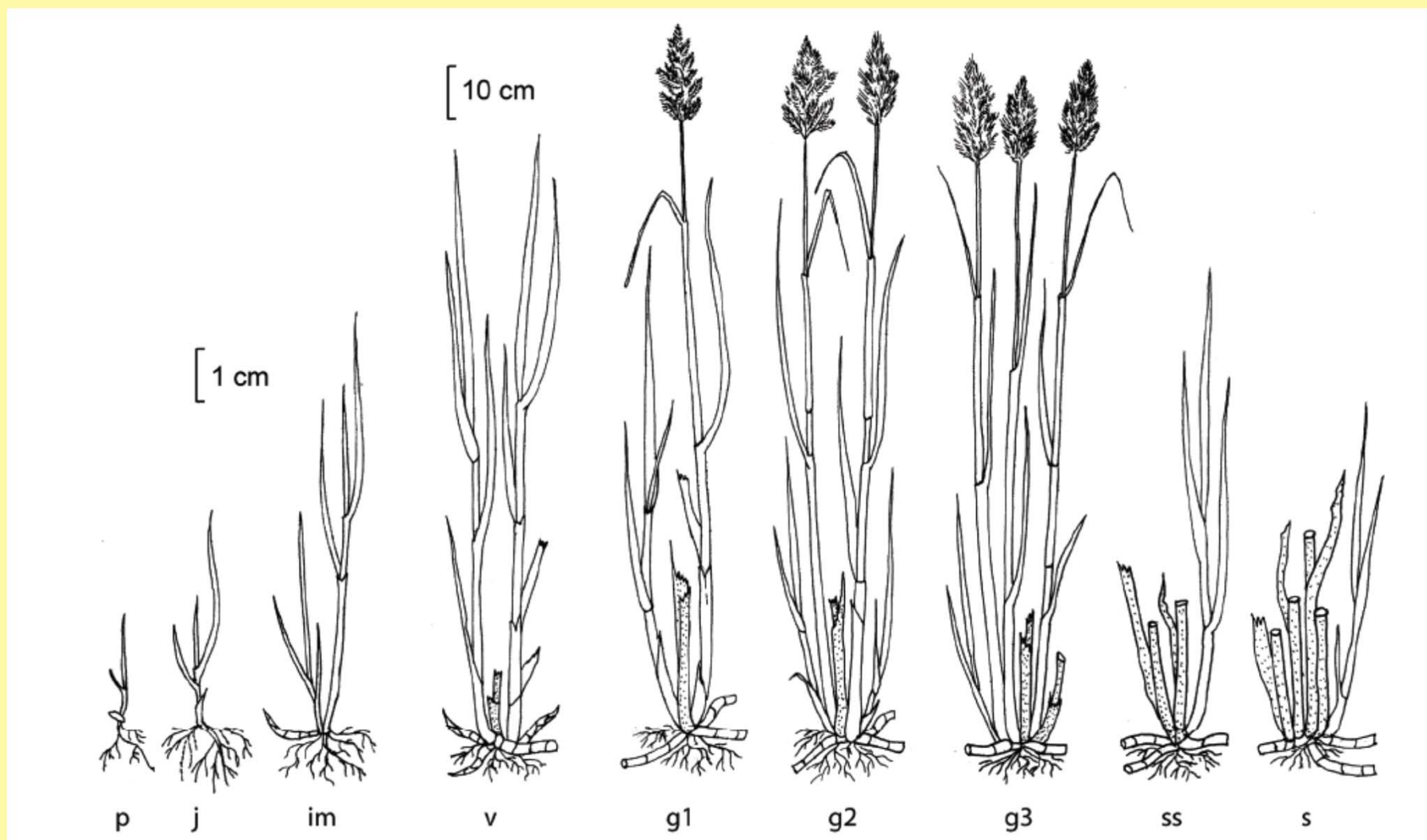
Траектории модели



Выражаю глубокую благодарность
д.б.н. Улановой Нине Георгиевне

**Спасибо
за внимание!**

Онтогенетические стадии вейника



Граф жизненного цикла вейника

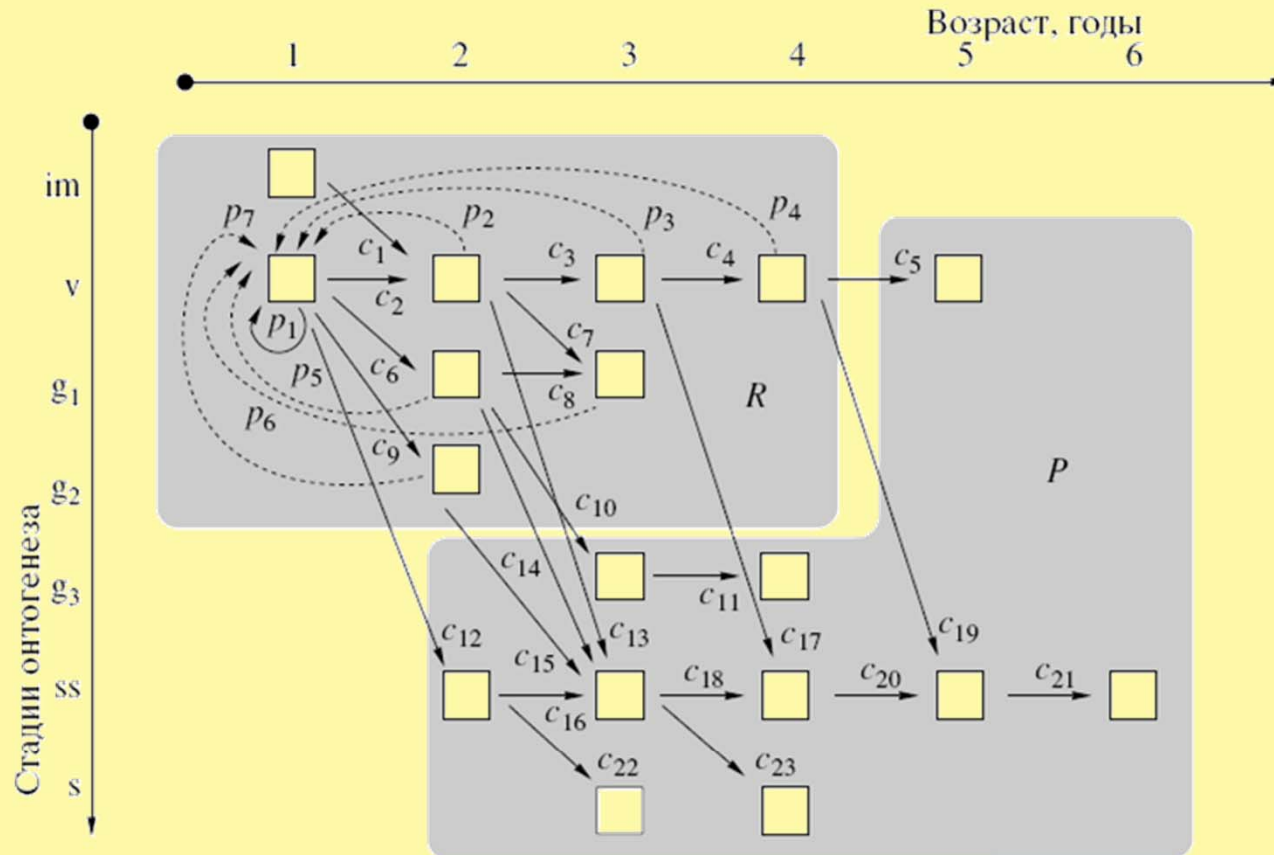


Рис. 2. Граф жизненного цикла вейника наземного *Calamagrostis epigeios*. Узлы решетки соответствуют наблюдаемым стадийно-возрастным состояниям, сплошные стрелки – онтогенетическим переходам и старению (параметры обозначают частоты соответствующих переходов), пунктирные стрелки – вегетативному размножению (параметр обозначает среднее, на одно родительское растение данного статуса, число потомков, доживших до состояния v^1). Затумованные контуры показывают содержание агрегированных макрогрупп.

Граф жизненного цикла берёзы

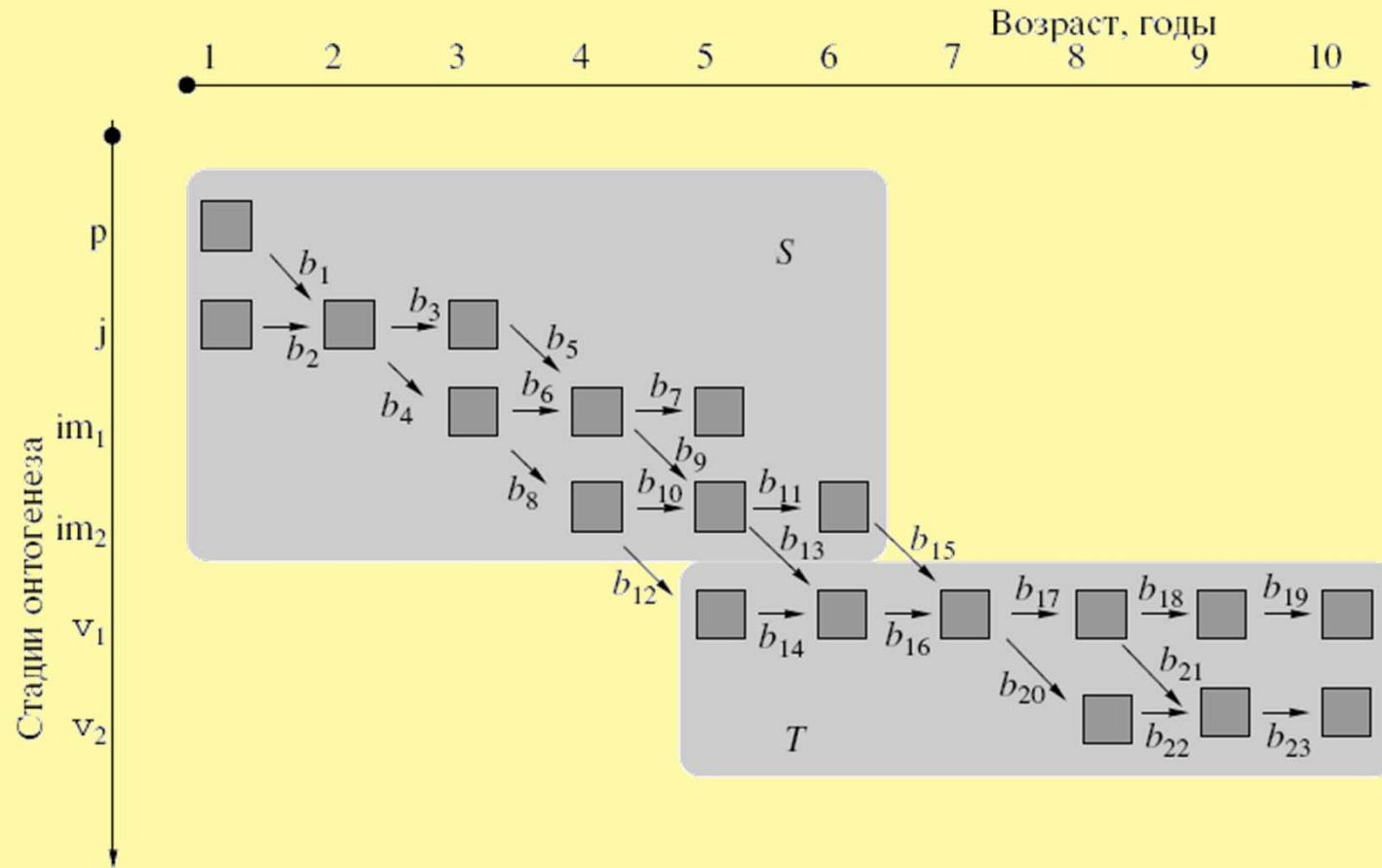


Рис. 3. Граф жизненного цикла берёзы повислой *Betula pendula*, построенный аналогично рис. 2.