Бифуркация Андронова-Хопфа

Мягкое возбуждение автоколебаний

Система в полярных координатах:

$$r' = r(c - r^2)$$
$$\varphi' = 2\pi$$

Система в декартовых координатах:

$$x' = x(c - (x^2+y^2)) - 2\pi y$$
$$y' = y(c - (x^2+y^2)) + 2\pi x$$

Жесткое возбуждение автоколебаний

Система в полярных координатах:

$$r' = r(c + 2r^2 - r^4)$$
$$\varphi' = 2\pi$$

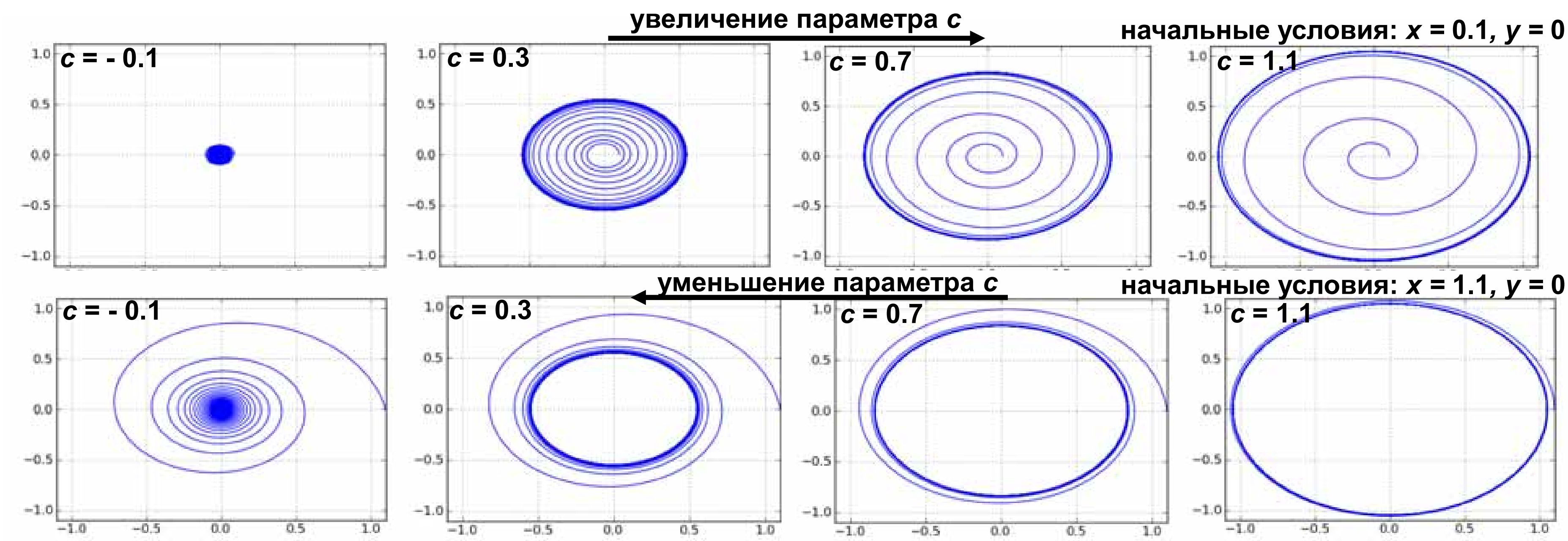
Система в декартовых координатах:

$$x' = x(c +2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2) - 2\pi y$$
$$y' = y(c +2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2) + 2\pi x$$

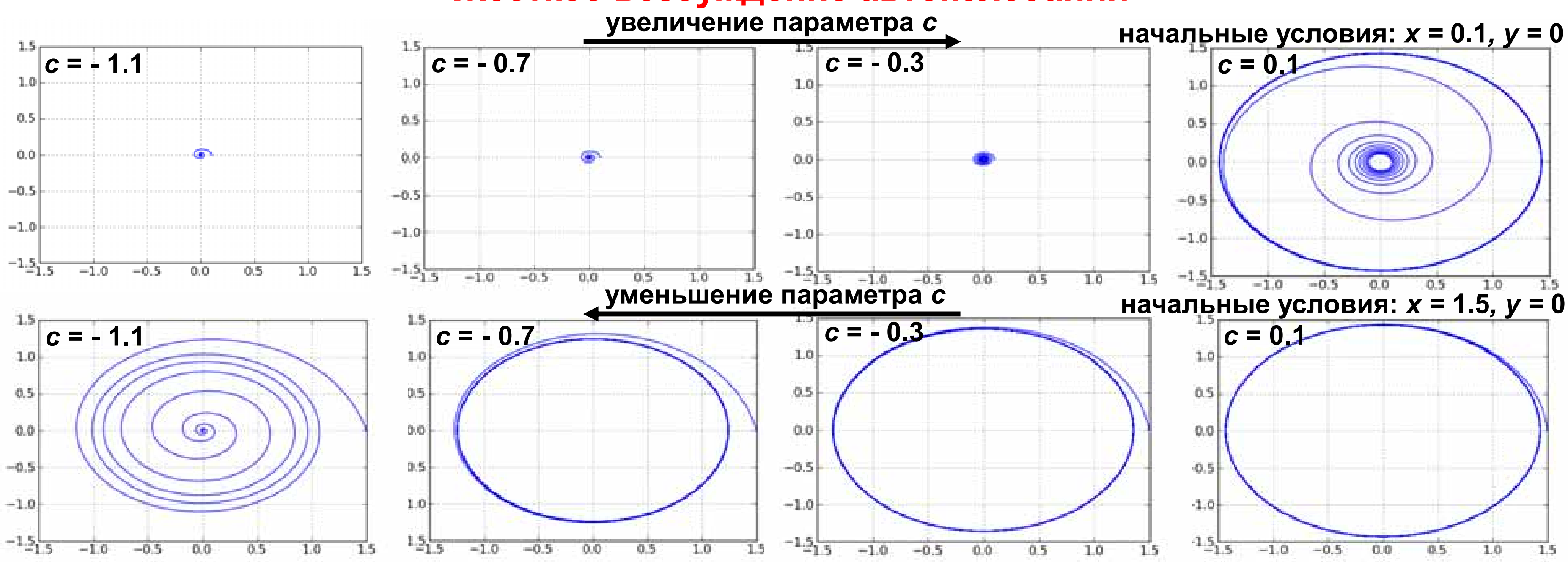
Замена переменных:

$$x = r\cos(\varphi) \qquad x^2+y^2 = r^2$$
$$y = r\sin(\varphi) \qquad y/x = \mathrm{tg}(\varphi)$$

Мягкое возбуждение автоколебаний



Жесткое возбуждение автоколебаний



Бифуркация Андронова-Хопфа
(мягкое возбуждение автоколебаний)

Система в полярных координатах:

$$r' = r(c - r^2)$$
$$\varphi' = 2\pi$$

Замена переменных:

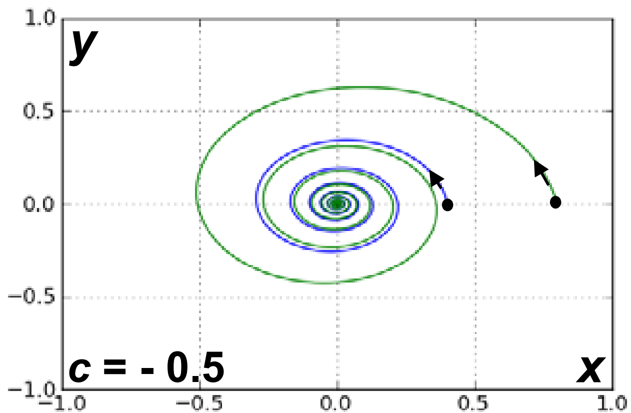
$$\begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{array} \xrightarrow[y/x = \mathrm{tg}(\varphi)]{x^2+y^2 = r^2}$$

Система в декартовых координатах:

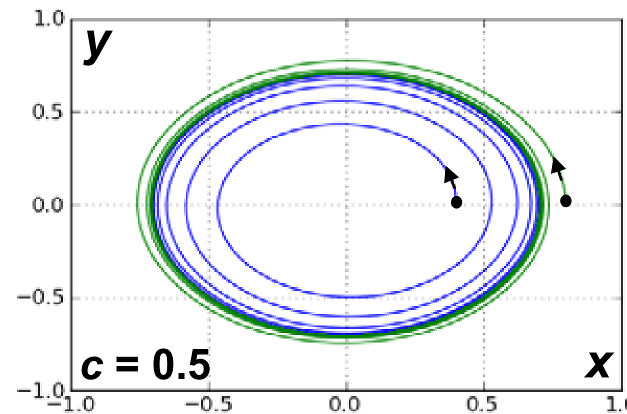
$$x' = x(c - (x^2+y^2)) - 2\pi y$$
$$y' = y(c - (x^2+y^2)) + 2\pi x$$

Стационарные режимы:

	$c < 0$	$c > 0$
$r_1 = 0$	устойчивый фокус	неустойчивый фокус
$r_2 = c^{1/2}$	-	устойчивый предельный цикл



начальные условия:	в прямом времени, t =10	в обратном времени, t = -10
$x_1 = 0.4$ $y_1 = 0$	**уст. фокус** $r_1 = 0$	∞
$x_2 = 0.8$ $y_2 = 0$	**уст. фокус** $r_1 = 0$	∞



начальные условия:	в прямом времени, t =10	в обратном времени, t = -10
$x_1 = 0.4$ $y_1 = 0$	**уст.пред. цикл,** $r_3 \sim 0.71$	**неуст. фокус** $r_1 = 0$
$x_2 = 0.8$ $y_2 = 0$	**уст.пред. цикл,** $r_3 \sim 0.71$	∞

Субкритическая бифуркация
(жесткое возбуждение автоколебаний)

Система в полярных координатах: ***Замена переменных:*** ***Система в декартовых координатах:***

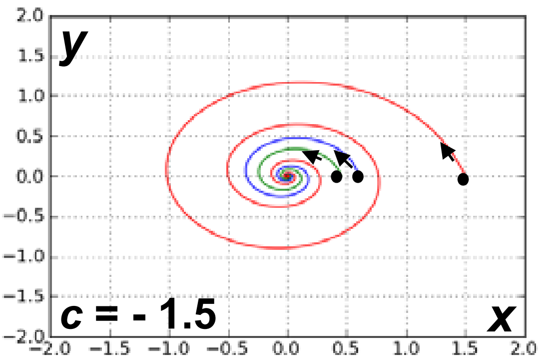
$$r' = r(c + 2r^2 - r^4)$$
$$\varphi' = 2\pi$$

$$\frac{x = r\cos(\varphi)}{y = r\sin(\varphi)} \xrightarrow[y/x = \mathrm{tg}(\varphi)]{x^2+y^2 = r^2}$$

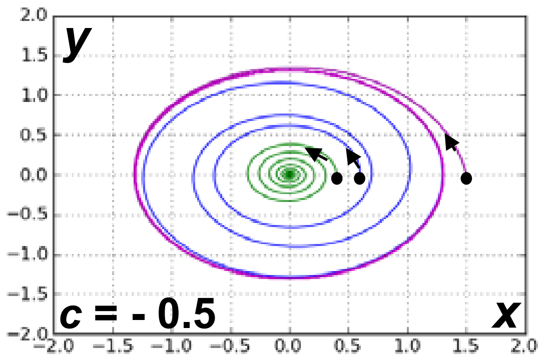
$$x' = x(c + 2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2) - 2\pi y$$
$$y' = y(c + 2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2) + 2\pi x$$

Стационарные режимы:

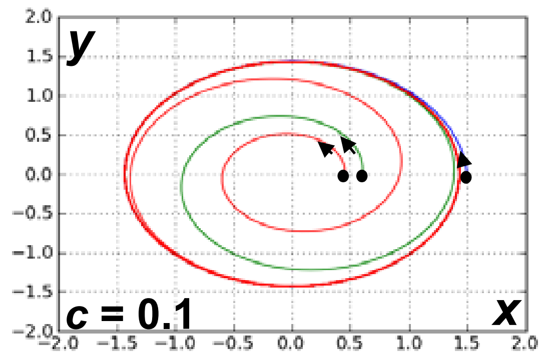
	$c < -1$	$-1 < c < 0$	$c > 0$
$r_1 = 0$	устойчивый фокус	устойчивый фокус	неустойчивый фокус
$r_2 = (1 - (1 + c)^{1/2})^{1/2}$	-	неустойчивый предельный цикл	-
$r_3 = (1 + (1 + c)^{1/2})^{1/2}$	-	устойчивый предельный цикл	устойчивый предельный цикл



начальные условия:	в прямом времени, t =10	в обратном времени, t = -10
$x_1 = 0.45$ $y_1 = 0$	**уст. фокус** $r_1 = 0$	∞
$x_2 = 0.6$ $y_2 = 0$	**уст. фокус** $r_1 = 0$	∞
$x_3 = 1.5$ $y_3 = 0$	**уст. фокус** $r_1 = 0$	∞



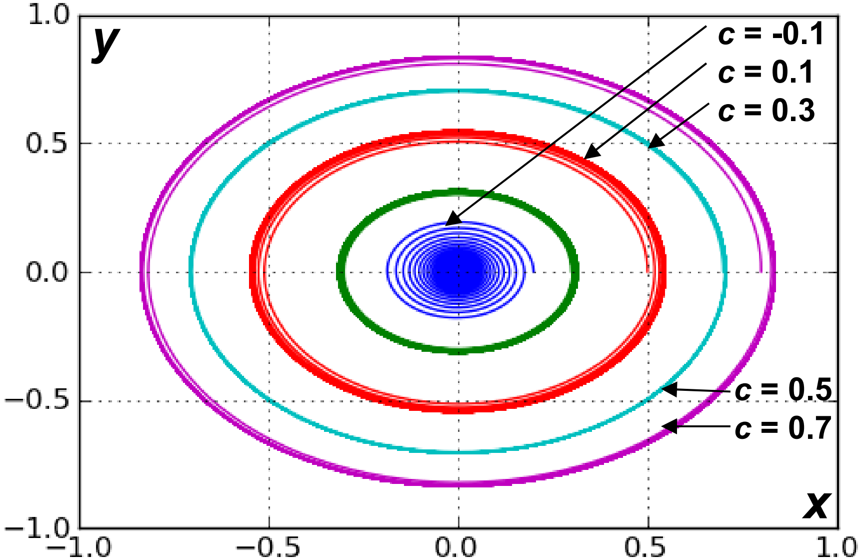
начальные условия:	в прямом времени, t =10	в обратном времени, t = -10
$x_1 = 0.45$ $y_1 = 0$	**уст. фокус** $r_1 = 0$	**неуст.пред. цикл,** $r_2 \sim 0.54$
$x_2 = 0.6$ $y_2 = 0$	**уст.пред. цикл,** $r_3 \sim 1.31$	**неуст.пред. цикл,** $r_2 \sim 0.54$
$x_3 = 1.5$ $y_3 = 0$	**уст.пред. цикл,** $r_3 \sim 1.31$	∞

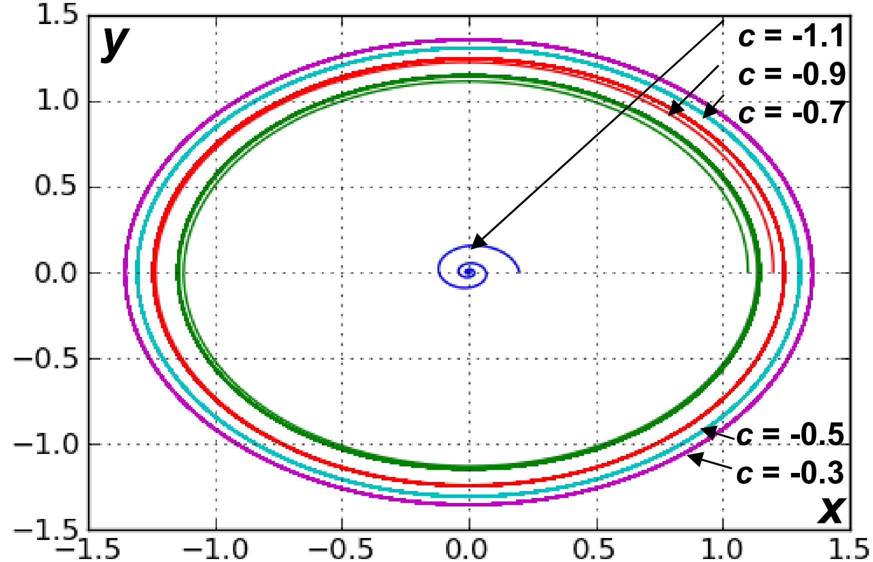


начальные условия:	в прямом времени, t =10	в обратном времени, t = -10
$x_1 = 0.45$ $y_1 = 0$	**уст.пред. цикл,** $r_3 \sim 1.43$	**неуст. фокус** $r_1 = 0$
$x_2 = 0.6$ $y_2 = 0$	**уст.пред. цикл,** $r_3 \sim 1.43$	**неуст. фокус** $r_1 = 0$
$x_3 = 1.5$ $y_3 = 0$	**уст.пред. цикл,** $r_3 \sim 1.43$	∞

Изменение амплитуды предельного цикла

(мягкое возбуждение автоколебаний) t =20 (жесткое возбуждение автоколебаний)





начальные условия	значение параметра c	радиус предельного цикла $\boldsymbol{r = c^{1/2}}$
x = 0.2, y = 0	c = -0.1	$\boldsymbol{r = 0}$
x = 0.3, y = 0	c = 0.1	$\boldsymbol{r \sim 0.32}$
x = 0.5, y = 0	c = 0.3	$\boldsymbol{r \sim 0.55}$
x = 0.7, y = 0	c = 0.5	$\boldsymbol{r \sim 0.71}$
x = 0.8, y = 0	c = 0.7	$\boldsymbol{r \sim 0.84}$

начальные условия	значение параметра c	радиус предельного цикла $\boldsymbol{r = (1 + (1 + c)^{1/2})^{1/2}}$
x = 0.2, y = 0	c = -1.1	$\boldsymbol{r = 0}$
x = 1.1, y = 0	c = -0.9	$\boldsymbol{r \sim 1.15}$
x = 1.2, y = 0	c = -0.7	$\boldsymbol{r \sim 1.24}$
x = 1.3, y = 0	c = -0.5	$\boldsymbol{r \sim 1.31}$
x = 1.35, y = 0	c = -0.3	$\boldsymbol{r \sim 1.36}$

При постепенном увеличении параметра *c:*

В точке r = 0 устойчивый фокус (при c<0) становится неустойчивым (при c>0), возникает устойчивый предельный цикл с малой амплитудой. Амплитуда цикла **постепенно** увеличивается.

При постепенном увеличении параметра *c:*

В точке r = 0 устойчивый фокус (при c<-1) остается устойчивым (при c>-1), **скачкообразно** возникают устойчивый предельный цикл с большой амплитудой и неустойчивый предельный цикл.