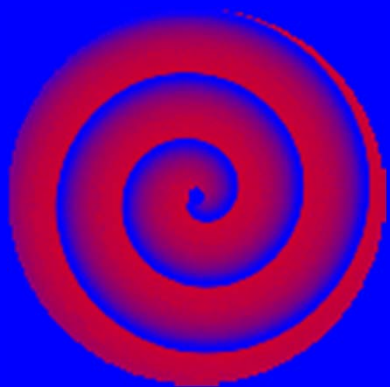


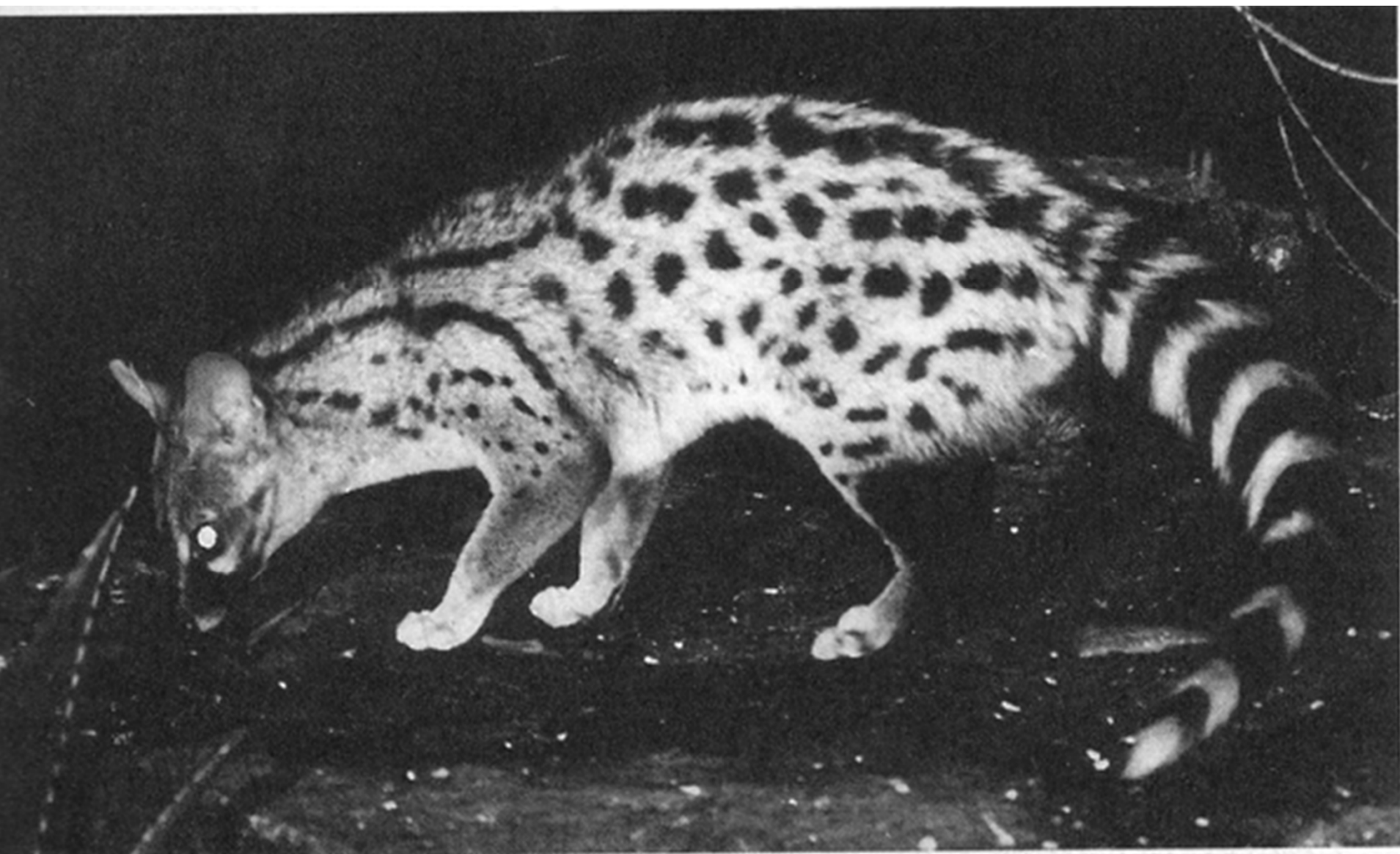
Г.Ю.Ризниченко



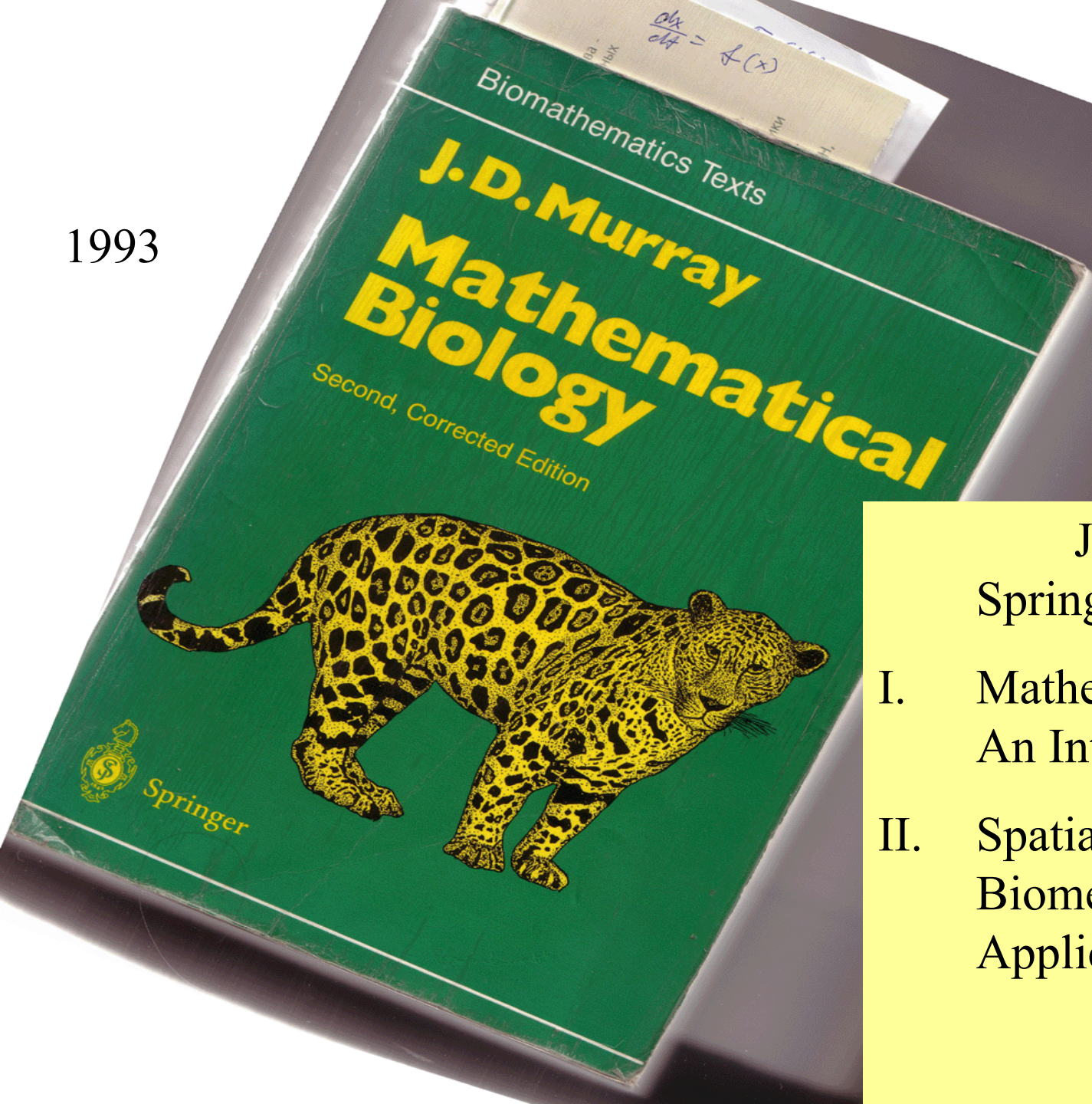
РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Самоорганизация в пространстве:

- Нарушения симметрии при развитии эмбриона из яйцеклетки.
- Дифференцировка клеток и тканей.
- Возникновение органов. Раскраска шкур ЖИВОТНЫХ



1993



J.D.Murray.

Springer

- I. Mathematical biology.
An Intriduction. 2003
- II. Spatial models and
Biomedical
Applications. 2004

Перевод 1 тома Д.Мюррей



Джеймс Д. Мюррей — профессор университетов Вашингтона и Оксфорда, член Королевского научного общества Великобритании и иностранный член Французской Академии наук, имеет почетные звания многих университетов мира. Автор более 200 научных статей и нескольких книг, основатель и директор Центра математической биологии университета в Оксфорде.

Джеймс Мюррей
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ



БИОФИЗИКА
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ

Джеймс Мюррей
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИОЛОГИЯ**



ТОМ 1: ВВЕДЕНИЕ

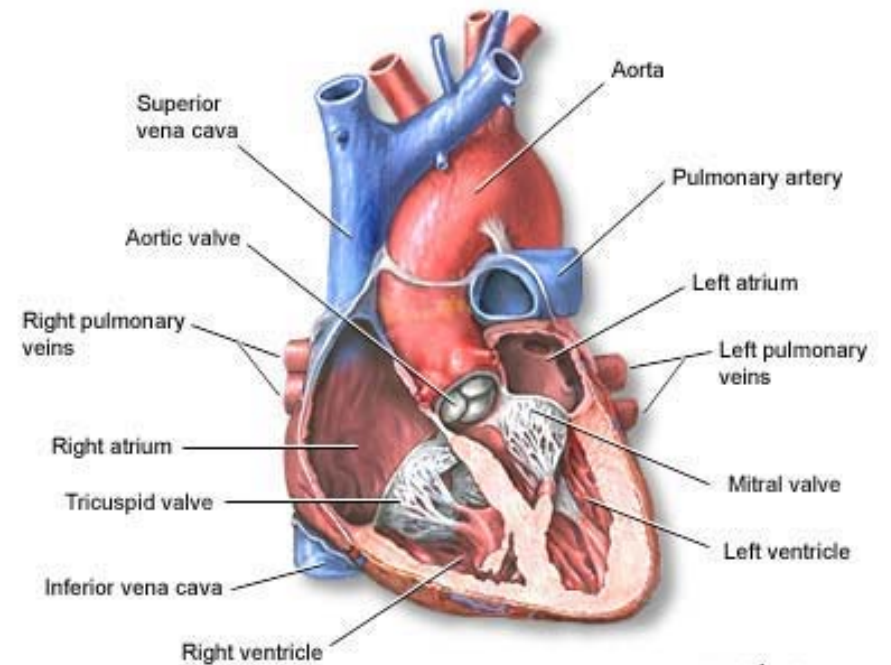
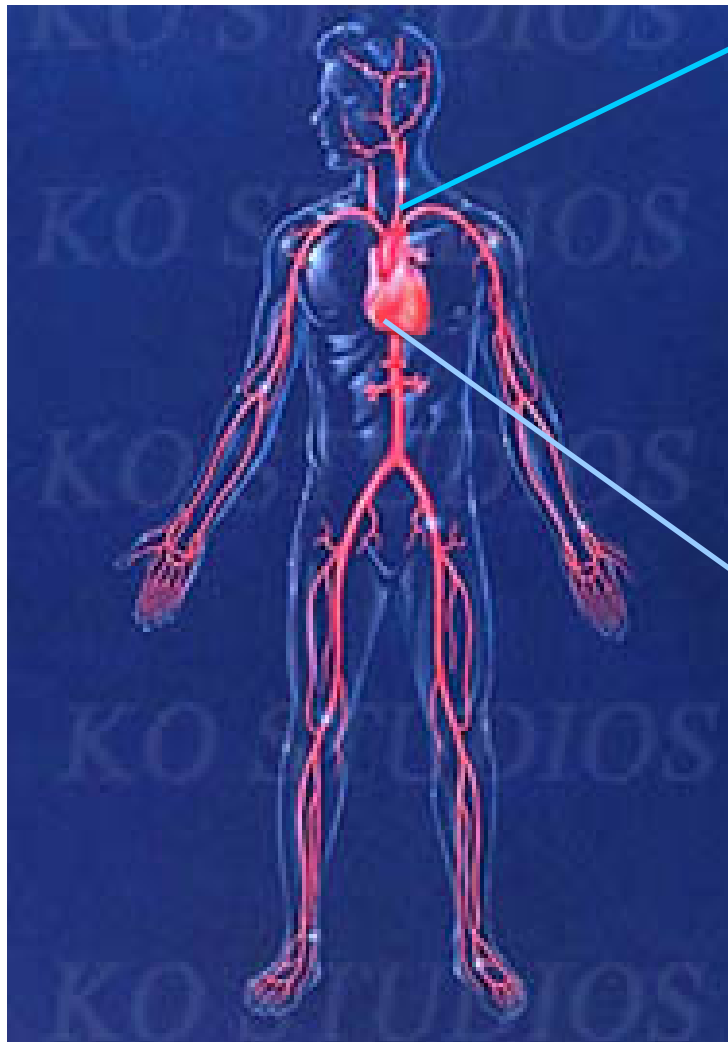




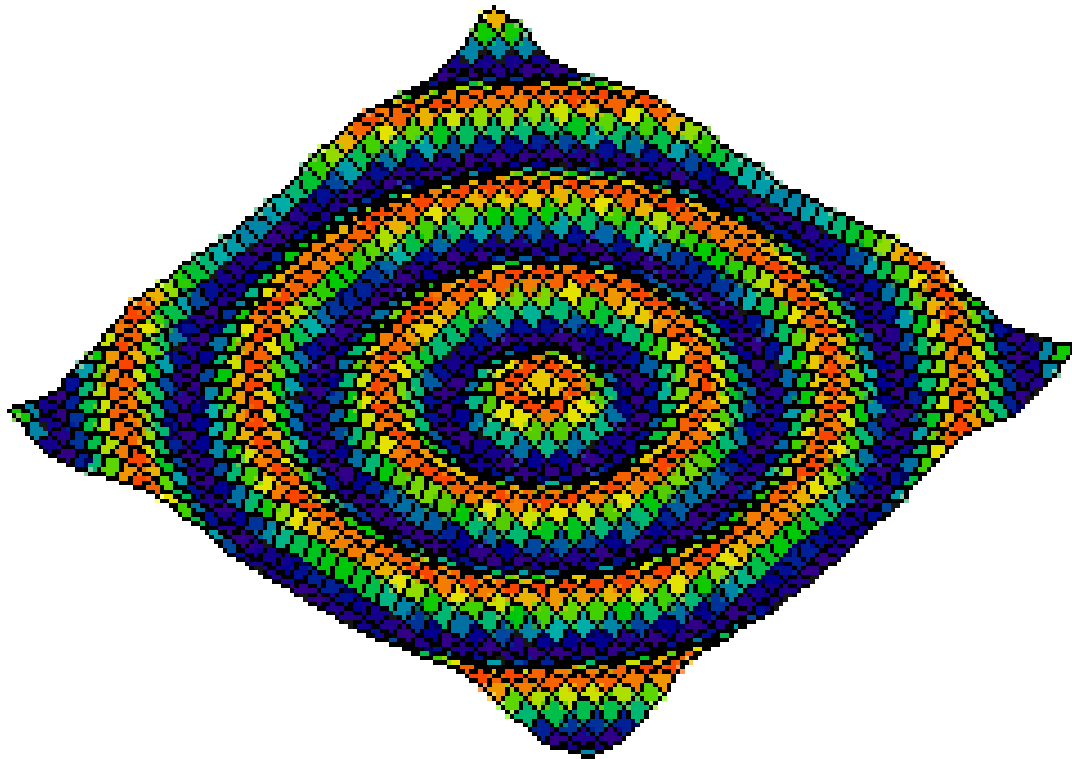
Распространение волн возбуждения

- Распространение нервного импульса
- Возбудимая ткань сердца
- Сокращение стенок сосудов (артерий)
- Сокращение стенок отделов желудочно-кишечного тракта

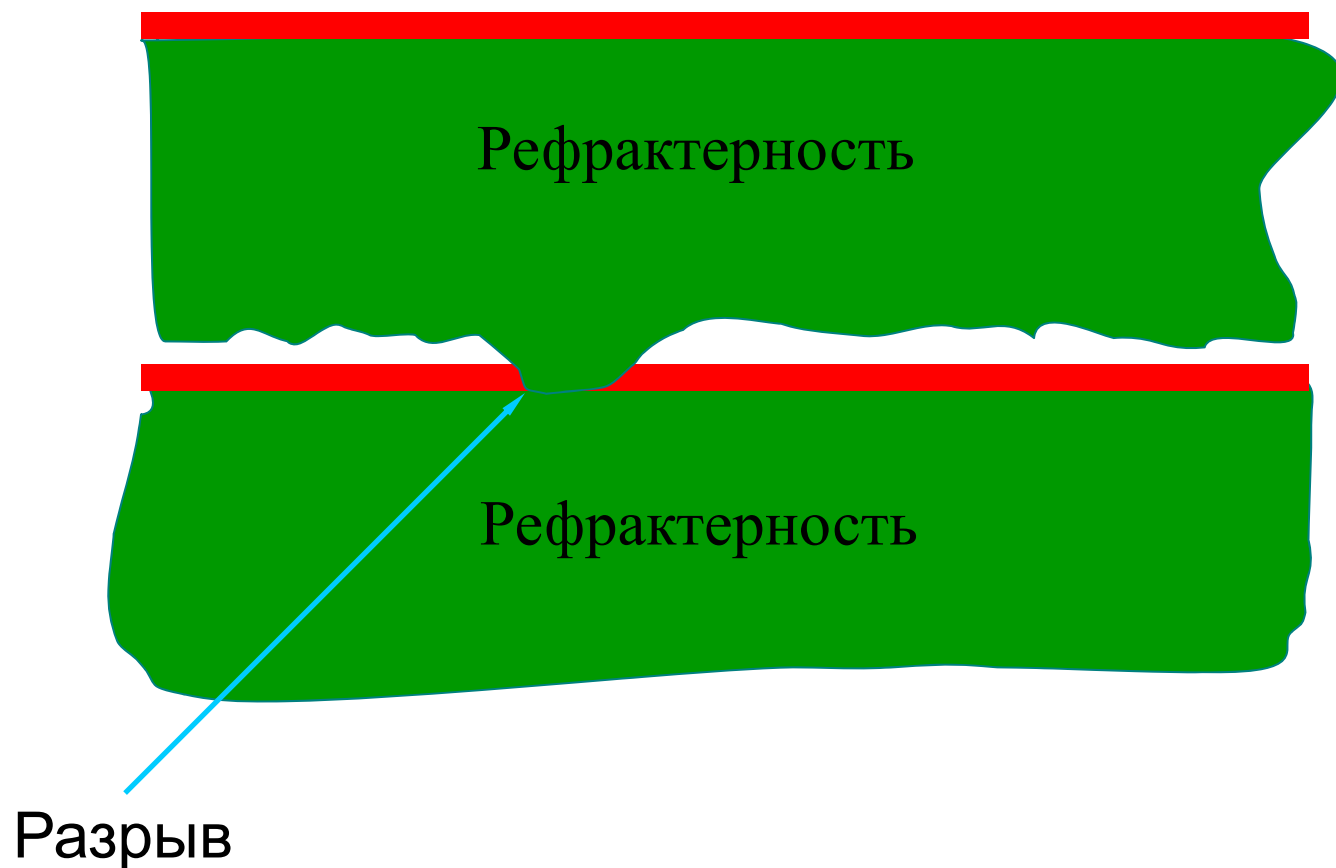
Строение сердца



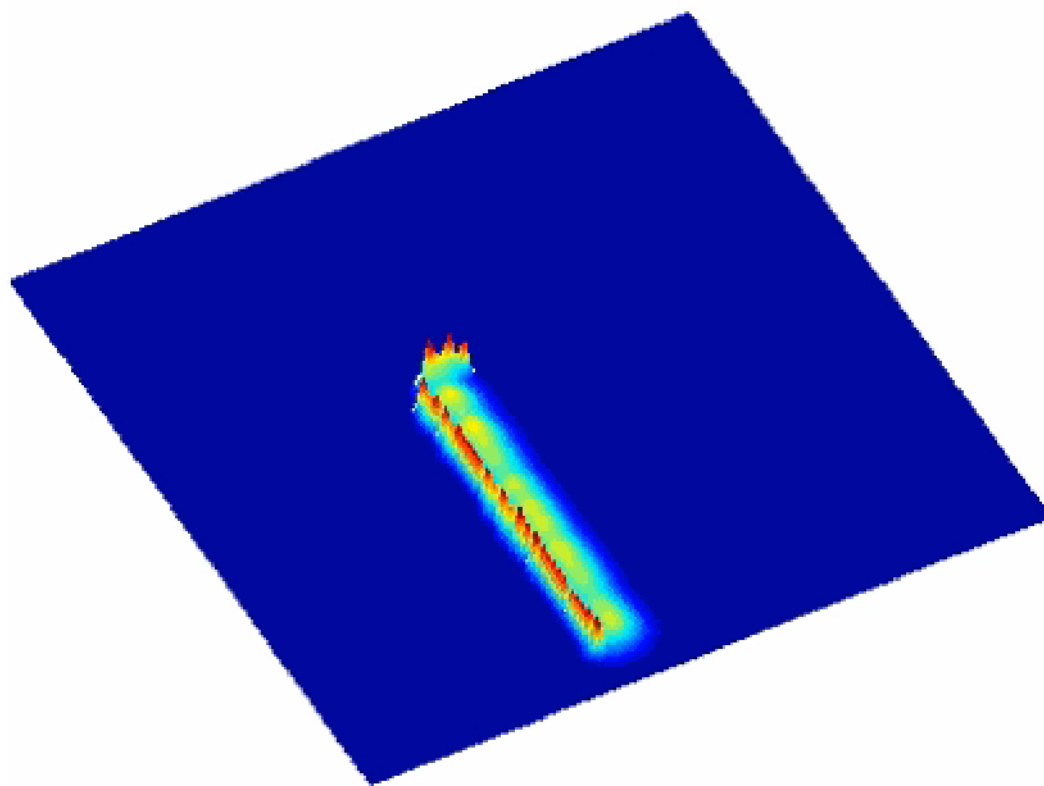
Волна возбуждения. В середине –
ведущий центр



Разрыв волны возбуждения

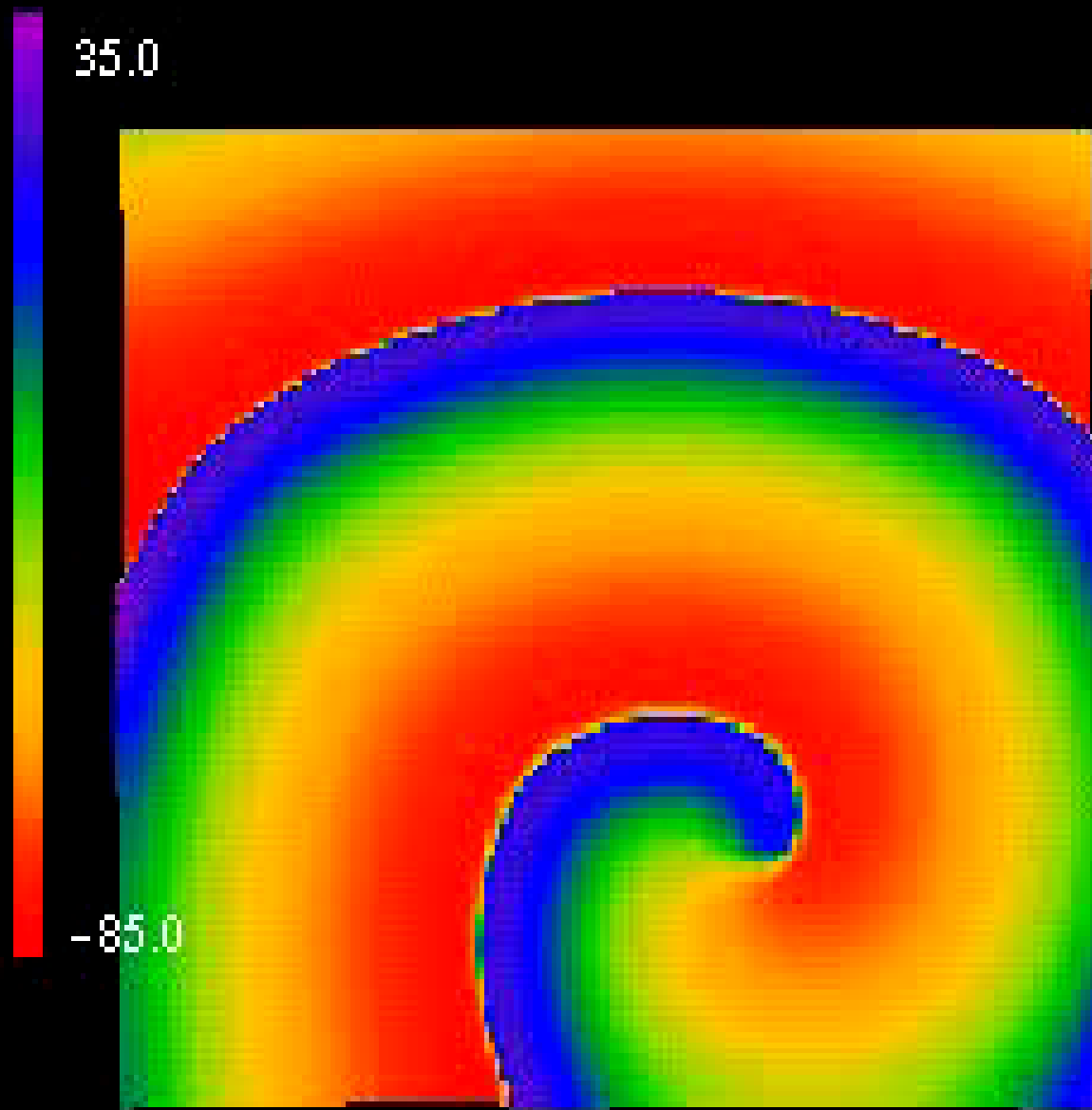


Разрыв фронта и возникновение спиральной волны

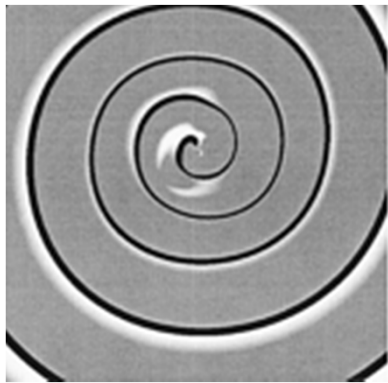


Спиральная волна

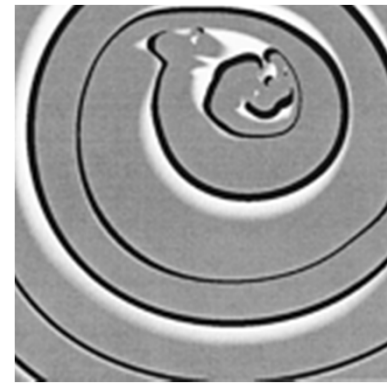
4037 milliseconds, frame 37



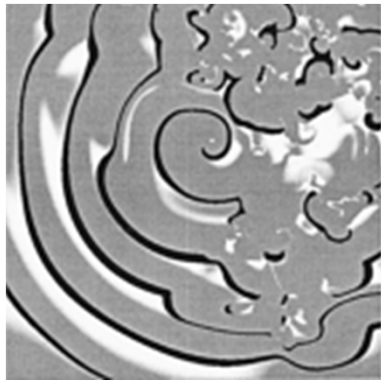
Рождение множества волн (т.е. *пространственно-временного хаоса*) – фибрилляция



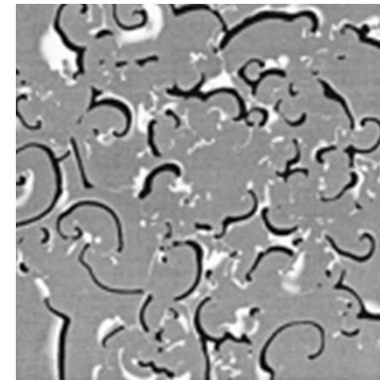
а. Исходная спиральная волна



б. Начало распада (в центре)



в. Увеличение области хаотического поведения



г. Конечная стадия распада спиральных волн

Процессы самоорганизации

- описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial r} \right),$$

$i = 1, 2, \dots, n$ Здесь D_i и D_{ij} ($i \neq j$) - коэффициенты диффузии и взаимной диффузии, F_i - нелинейные функции, описывающие взаимодействие компонентов.

Активные среды

- а) существует распределенный источник энергии или веществ, богатых энергией;
- б) каждый элементарный объем среды находится в состоянии, далеком от термодинамического равновесия, т.е. является открытой термодинамической системой, в которой диссипирует часть энергии, поступающей из распределенного источника;
- в) связь между соседними элементарными объемами осуществляется за счет процессов переноса.

Типы пространственно-временного поведения в активных средах (1)

- Распространяющиеся возмущения в виде бегущего импульса.
- Генерация волн автономными источниками импульсной активности.
- В качестве источников волн также могут выступать либо неоднородности среды, вызванные отклонением значений параметров системы из-за механических либо других повреждений, либо локальные кратковременные флуктуации переменных (источники типа "ведущий центр").

Стоячие волны.

Типы пространственно-временного поведения в активных средах (2)

- Синхронные автоколебания во всем пространстве. Синхронизация происходит с частотой того элемента пространства, который обладает наименьшим периодом колебаний.
- Квазистохастические волны, которые могут быть связаны с динамическим хаосом в локальной системе, но могут и возникать в распределенной системе с устойчивыми локальными элементами.
- Стационарные неоднородные распределения переменных в пространстве — диссипативные структуры.

Классические работы

- А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов в работе “Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме” (Бюллетень МГУ, Серия А, Математика и механика, 1937, т.1; Вопросы кибернетики, вып.12, М.,1975, стр.3-30
- Аллан Тьюринг. Химические основы морфогенеза. 1952
A.Turing. The chemical basis of morphogenesis. Phyl. Trans. Roy. Soc. (London) v.237, p. 37-72

Уравнение диффузии. Закон Фика

диффузионный поток какого-либо компонента, т.е. масса диффундирующего компонента, проходящая в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной к направлению диффузии, пропорционален градиенту концентрации этого компонента, взятому с обратным знаком (закон Фика):

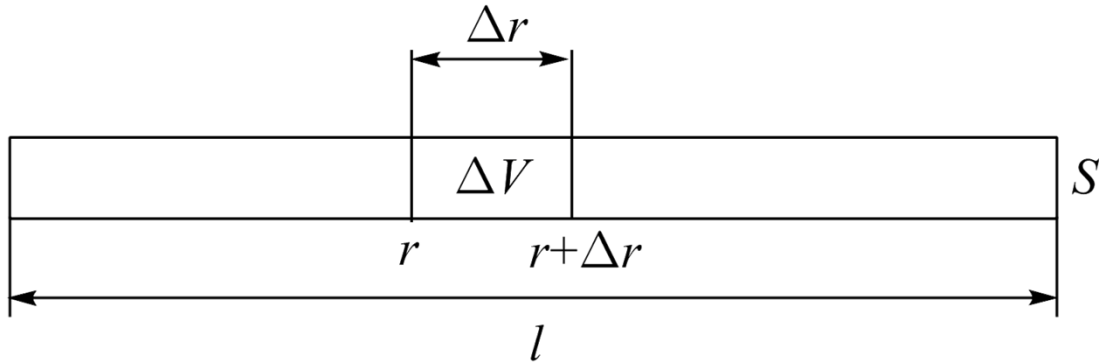
$$I = -D \frac{\partial C}{\partial r}.$$



Фик Адольф Юджин
(Fick Adolf Eugen,
1829-1901)

– немецкий физик и физиолог, сформулировал закон диффузии, изобретатель контактных линз.

Вывод уравнения диффузии



$$\Delta M_r = -D \frac{\partial C(r, t)}{\partial r} S \Delta t \qquad \Delta M_{r+\Delta r} = -D \frac{\partial C(r + \Delta r, t)}{\partial r} S \Delta t$$

$$\Delta M = \Delta M_r - \Delta M_{r+\Delta r}, \qquad \Delta M = \left[D \frac{\partial C(r + \Delta r, t)}{\partial r} - D \frac{\partial C(r, t)}{\partial r} \right] S \Delta t.$$

$$\Delta C = \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{\Delta M}{S \Delta r} = \frac{D \frac{\partial C(r + \Delta r, t)}{\partial r} - D \frac{\partial C(r, t)}{\partial r}}{\Delta r} \Delta t$$

$$\Delta r \rightarrow 0$$

$$\Delta C = \frac{\partial}{\partial r} \left(D \frac{\partial C(r, t)}{\partial r} \right) \Delta t$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial C(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(D \frac{\partial C(r, t)}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + F(r, t)$$

$F(r, t)$ – функция источника

Уравнения реакции-диффузии

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = f_i(C_1, C_2, \dots, C_n) + D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial r^2}$$

Начальные и граничные условия

Этапы решения уравнения диффузии

$$C_t = DC_{rr} + f(r, t)$$



Андрей
Николаевич
Тихонов
1906-1993



Александр
Андреевич
Самарский
1919-2008

1. Решение однородного уравнения с нулевыми граничными условиями $C(0, t) = 0$; $C(l, t) = 0$. и заданным начальным условием $C(r, 0) = \varphi(r)$.
2. Решение неоднородного уравнения с нулевыми граничными условиями
3. Решение неоднородного уравнения с заданными граничными условиями

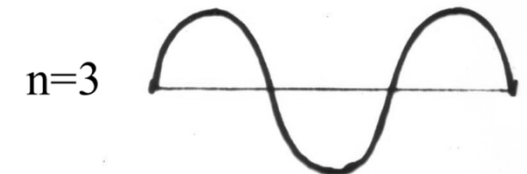
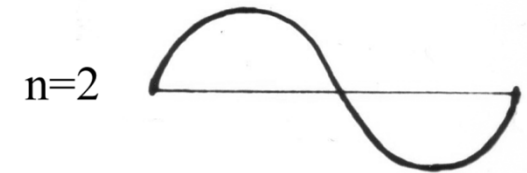
Уравнения
Математической
физики

Линейное уравнение диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}$$

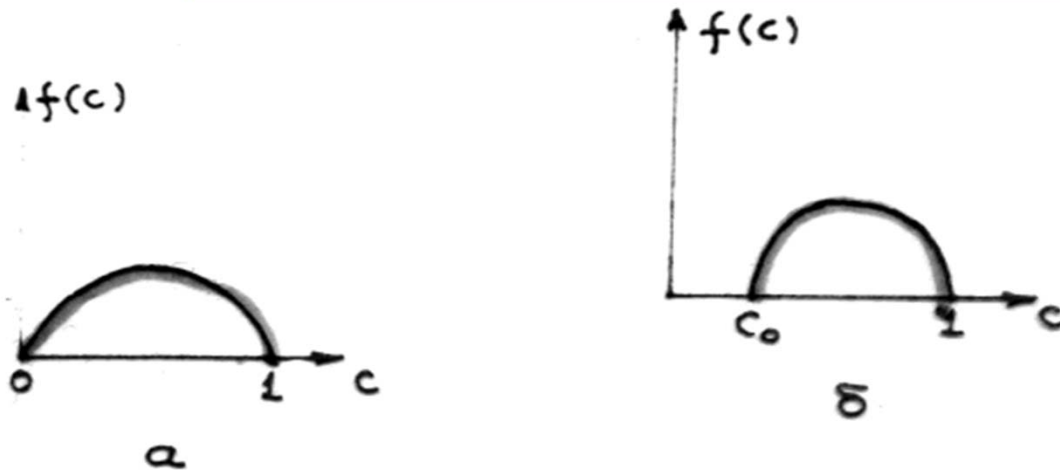
$$C(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 Dt} \sin \frac{\pi n}{l} r$$

$$C(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{p_n t} e^{ik_n r}$$



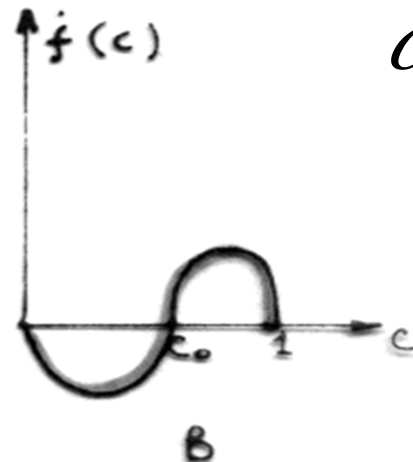
Собственные функции

Модель распространения волны Петровского-Колмогорова- Пискунова



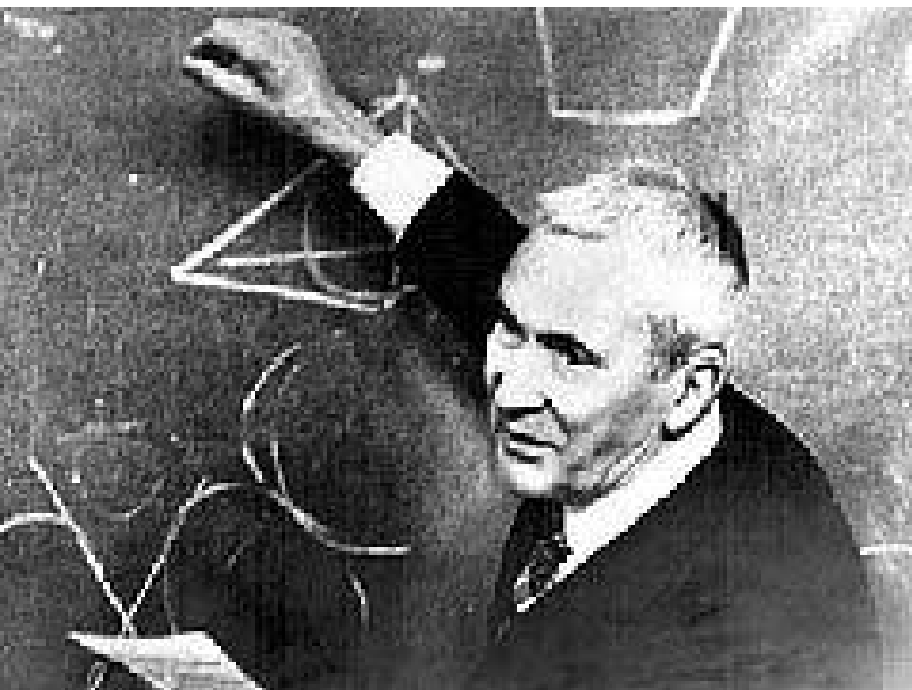
Функции правой
части

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + f(C)$$



Модель распространения
доминирующего вида

Андрей Николаевич Колмогоров

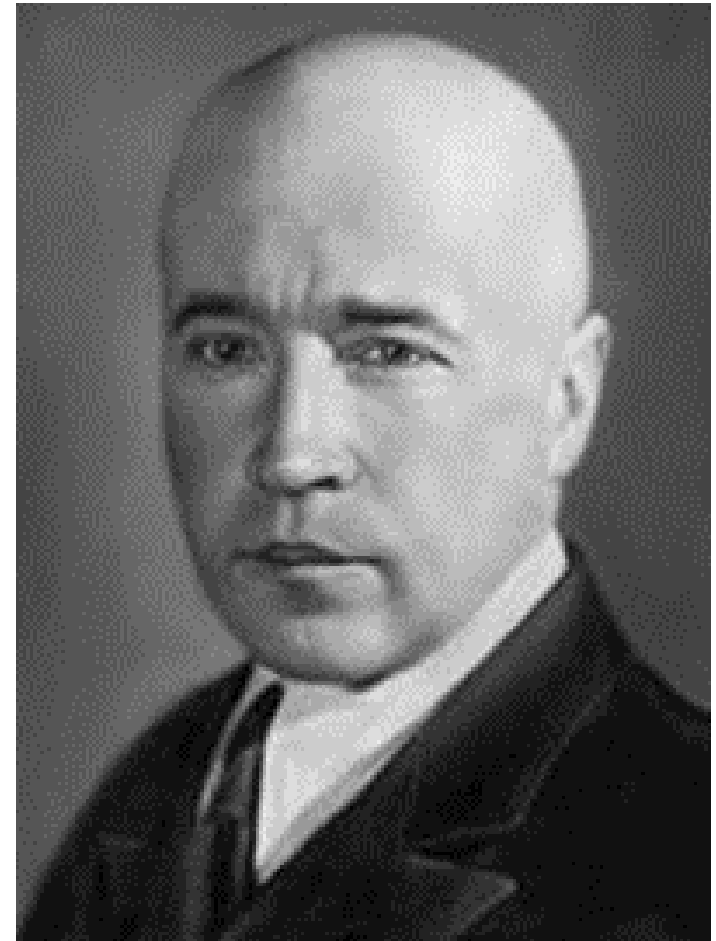


Человечество всегда мне представлялось в виде множества блуждающих в тумане огоньков, которые лишь смутно чувствуют сияние, рассеиваемое всеми другими, но связаны сетью ясных огненных нитей, каждый в одном, двух, трех... направлениях. И возникновение таких прорывов через туман к другому огоньку вполне разумно называть "ЧУДОМ".

Андрей Николаевич Колмогоров занимает уникальное место в современной математике, и в мировой науке в целом. По широте и разнообразию своих научных занятий он напоминает классиков естествознания прошлых веков

Ива́н Гео́ргиевич Петро́вский

1901-1973



выдающийся советский математик и деятель отечественного образования. С 1951 по 1973 гг. — ректор Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + f(C)$$

АВТОВОЛНОВОЕ РЕШЕНИЕ

- Предельная форма кривой плотности дается решением уравнения:

$$D \frac{d^2 V}{dz^2} + \lambda_0 \frac{dV}{dz} + f(V) = 0,$$

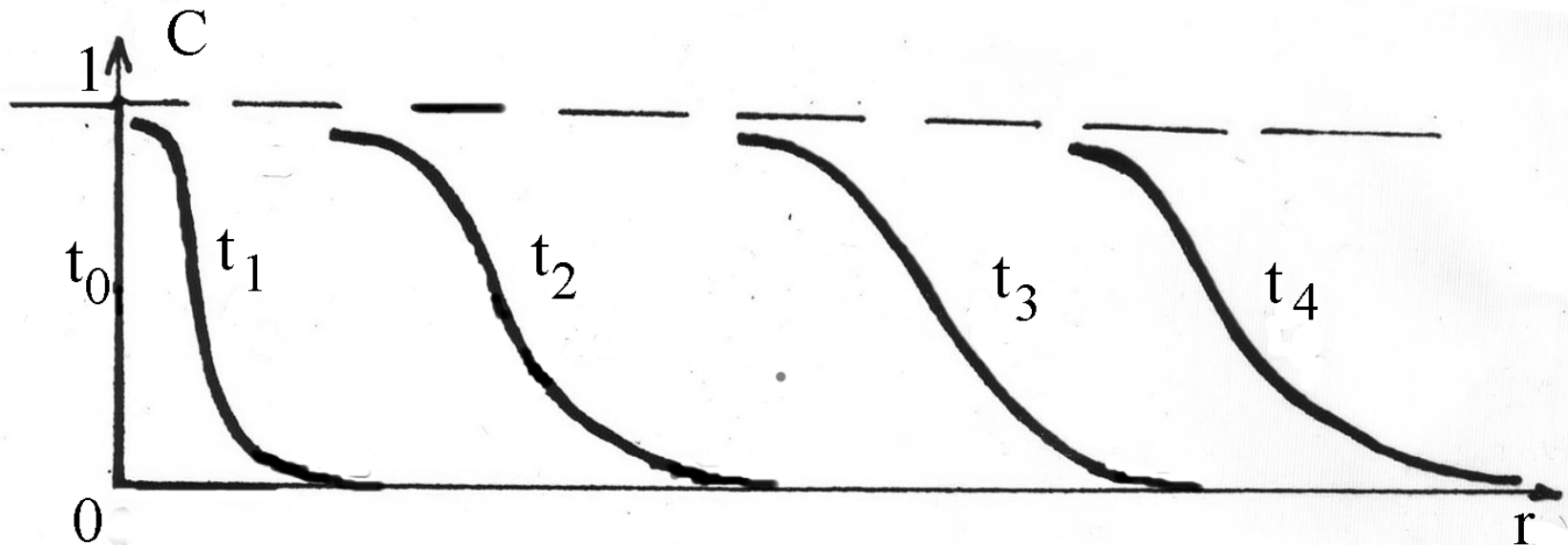
- обращаясь в нуль при $Z = +\infty$ и в единицу при $Z = -\infty$.
- Такое решение $V(Z)$ всегда существует и единственно, с точностью до преобразования (A – произвольная постоянная), не меняющего форму кривой.
- Уравнение может быть получено, если искать решение уравнения распространения волны в форме:
- $C(t, r) \approx V(r - \lambda t)$

Профиль распространяющейся волны в разные моменты времени в уравнении Петровского-Колмогорова-Пискунова

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + f(C)$$

Предельная скорость
распространения
фронта волны

$$\lambda_0 = 2\sqrt{D \cdot f'(0)}$$



Два уравнения реакция-диффузия

$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y, r) + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y, r) + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$

Линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = a \xi + b \eta + D_{\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \quad a = \frac{\partial P(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial P(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = c \xi + d \eta + D_{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \quad c = \frac{\partial Q(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}, \quad d = \frac{\partial P(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}$$

Решение линейной системы
ищем в виде:

$$\xi(t, r) = A e^{pt} e^{ikr},$$

$$\eta(t, r) = B e^{pt} e^{ikr}$$

k^2 – волновое число, «частота» по пространству