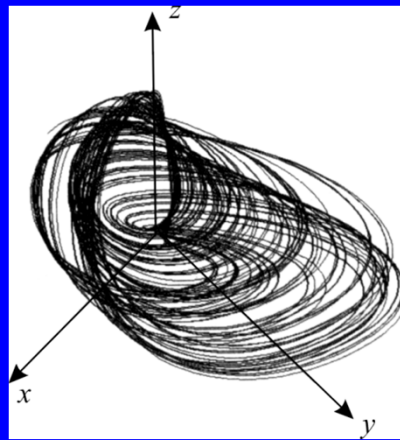
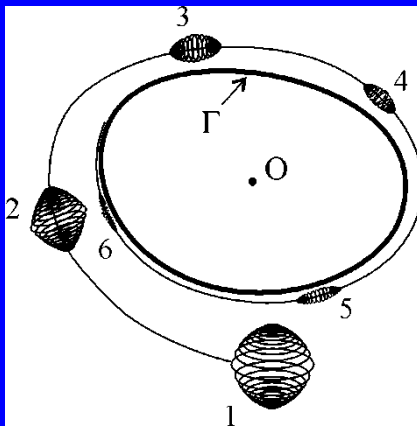
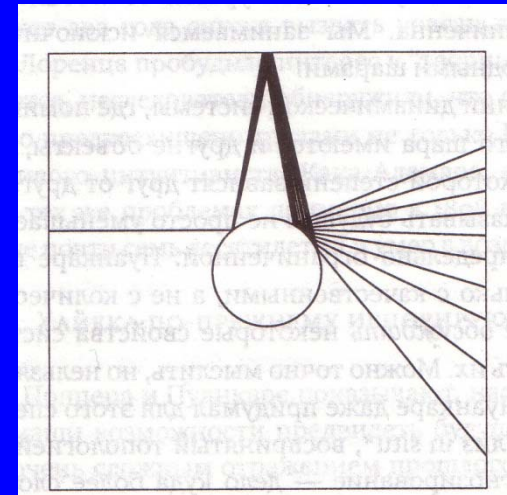




Г.Ю Ризниченко



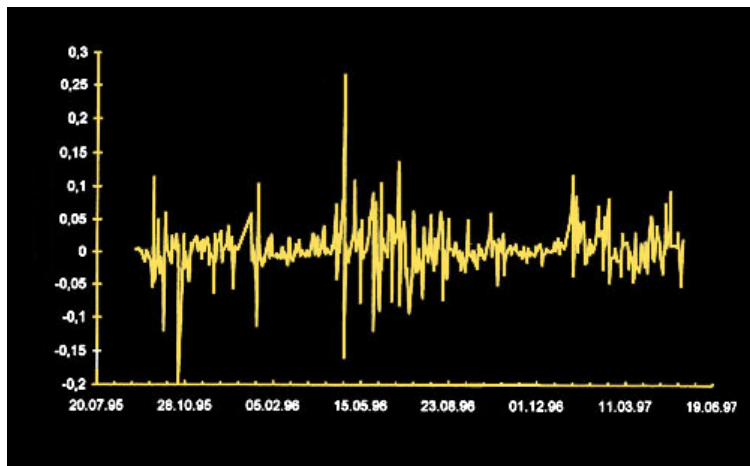
Динамический хаос



Фото Роберта Гендлера. Созвездие стрельца

- Бесформенная совокупность материи и пространства (Противоположно Космосу – упорядоченности). Все рождается из Хаоса (древнегреческое).
- Беспорядок, неразбериха, смешение. Значение появилось в ранне-христианские времена

Потребность в
определенности —
естественная биологическая
потребность человека,
но она же — порок мышления



Динамика биржевых индексов

Мы живем не в
Среднестане, а в
Крайнестане



Динамический хаос

Основные понятия

- *Основные понятия теории динамических систем.*
- *Предельные множества. Аттракторы.*
- *Странные аттракторы. Динамический хаос.*
- *Размерность странных аттракторов.*
Фракталы

χαος

CHAOS

Weather

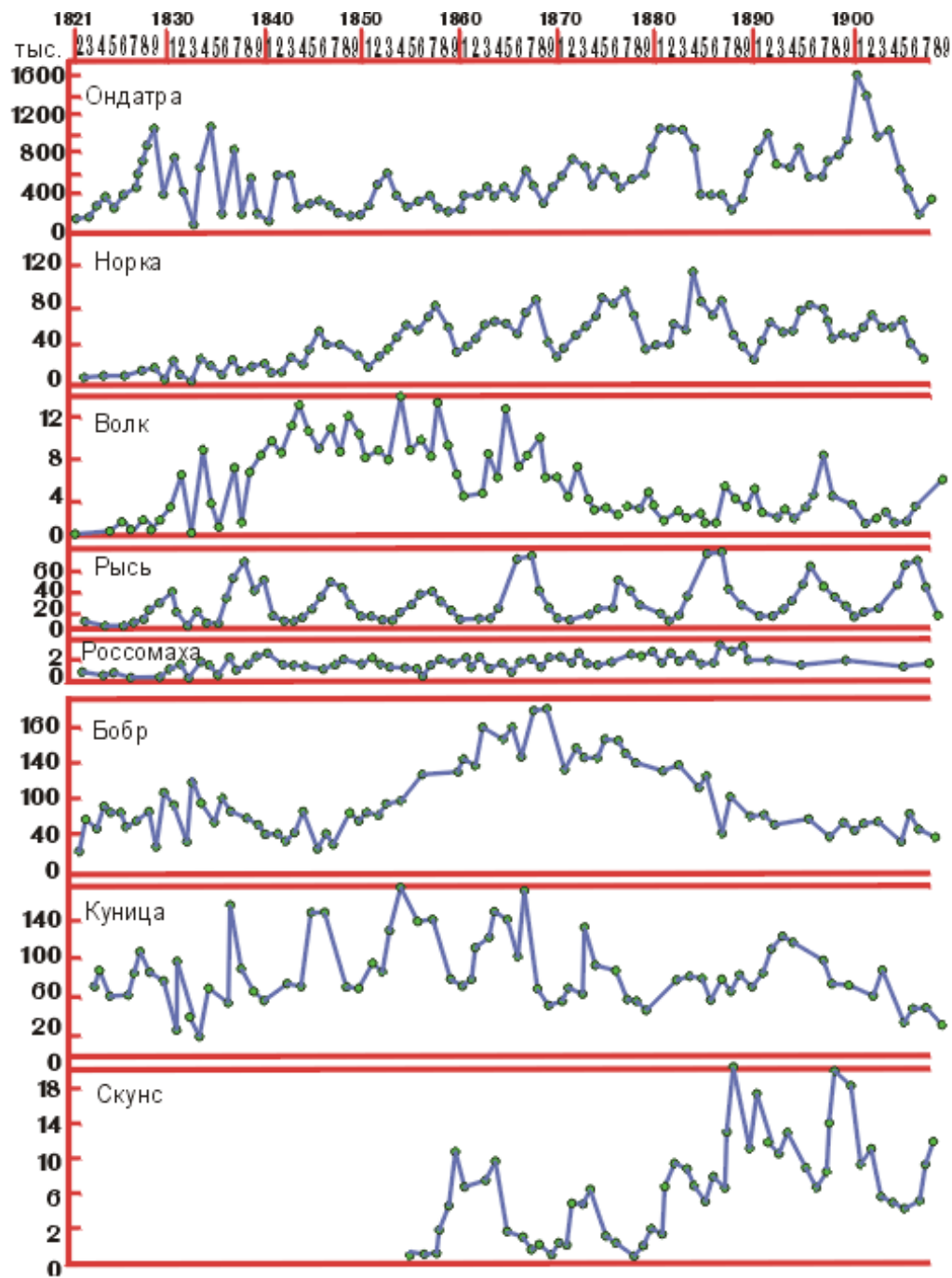


Chemical
Kinetics



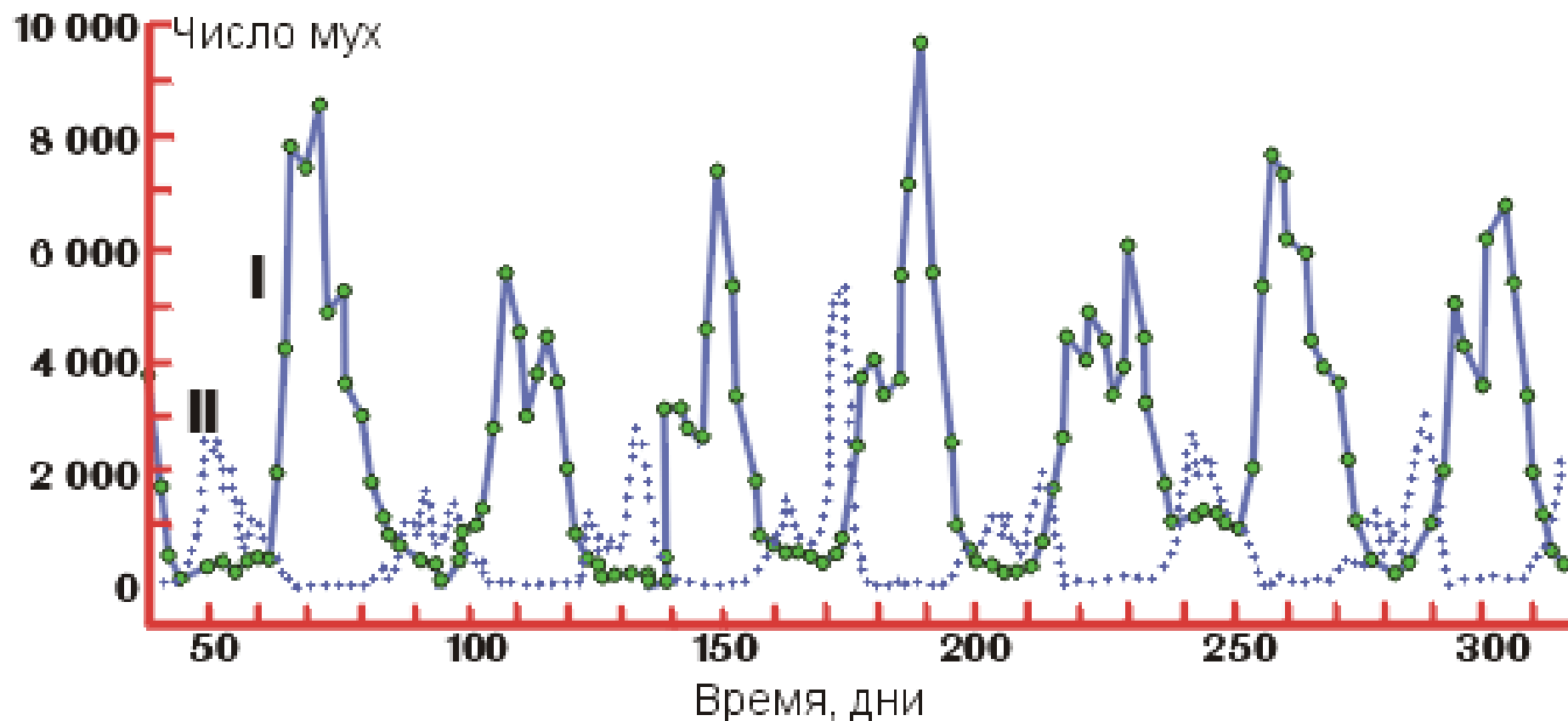
Heart rythm





Данные по
заготовкам
пушнины
компанией
Гудзонова
Залива

Динамика численности плодовой мушки



Анри Пуанкаре —

великий французский математик
в книге «Наука и метод» в 1908 г. писал:

«В неустойчивых системах
совершенно ничтожная причина,
ускользающая от нас по своей
малости, вызывает значительные
действия, которые мы не в
состоянии предугадать...
Предсказание становится
невозможным, мы имеем перед
собой явление случайное».



Лоренц

Lorenz EN (1963)

Deterministic non-periodic
flow. J.Atmos. Sci: 20, 131-141

Конвекция в подогреваемом снизу слое жидкости,
модель водяного колеса, одномодовый лазер, диссипативный
осциллятор с инерционным возбуждением

$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x,$$

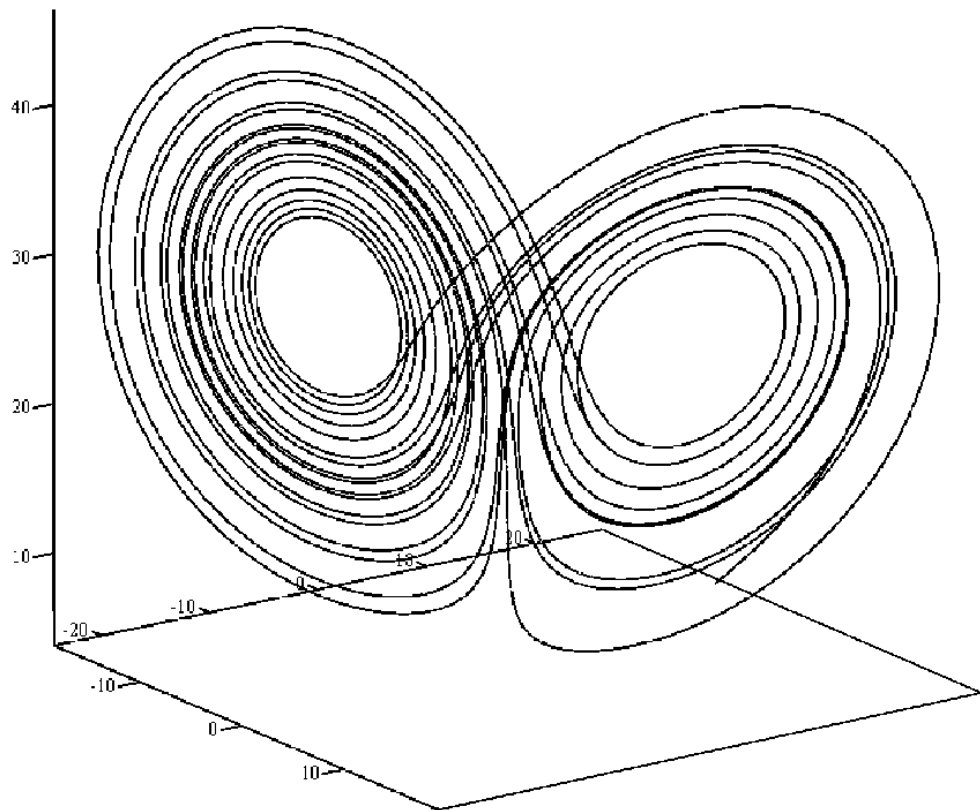
$$\dot{y} = rx - y - xz,$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

$$r=28, s=10,$$

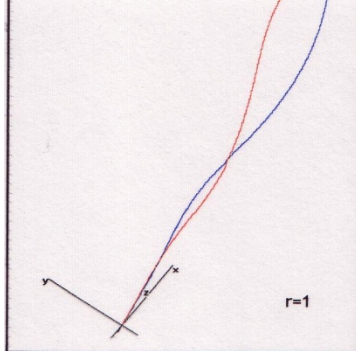
$$b=8/3$$

Хаотические траектории в
системе Лоренца

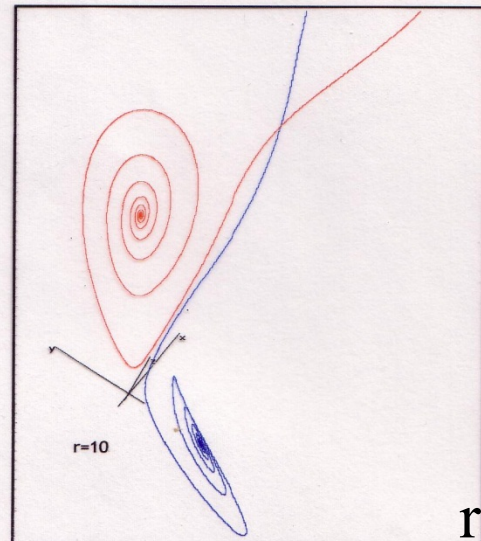
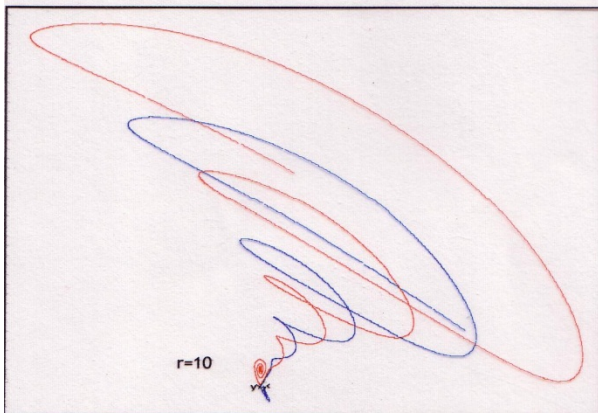


Траектории системы Лоренца при разных значениях параметра r

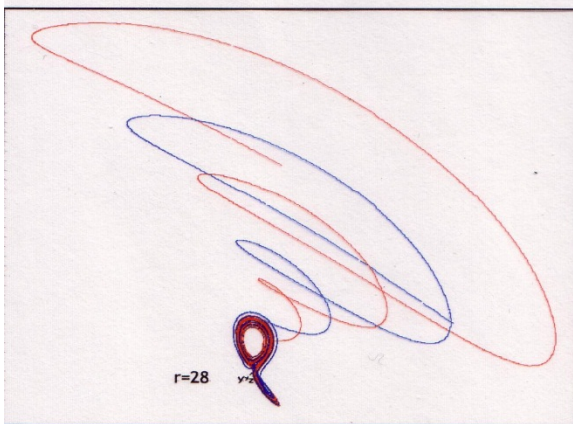
Игорь Федик
каф. биофизики



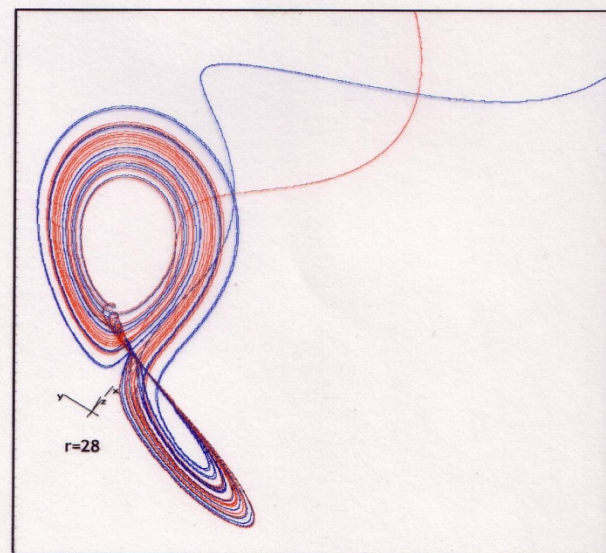
$r=1$



$r=10$

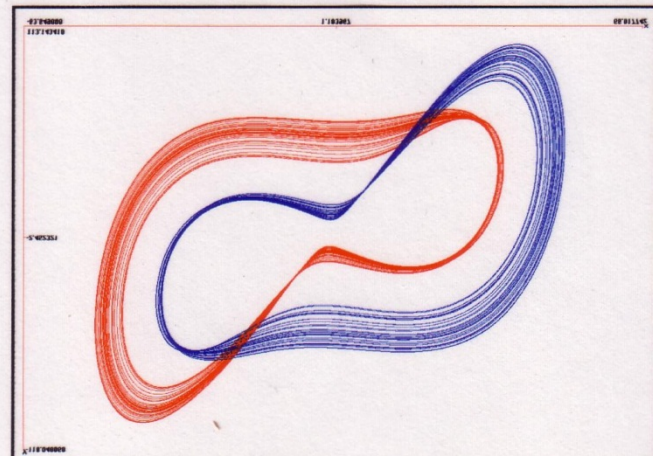
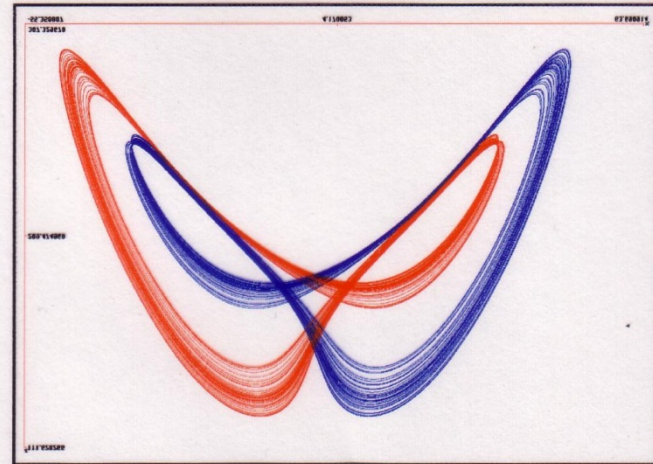
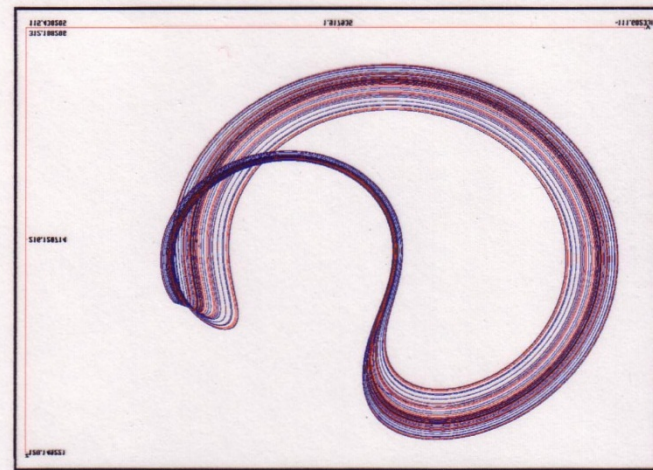
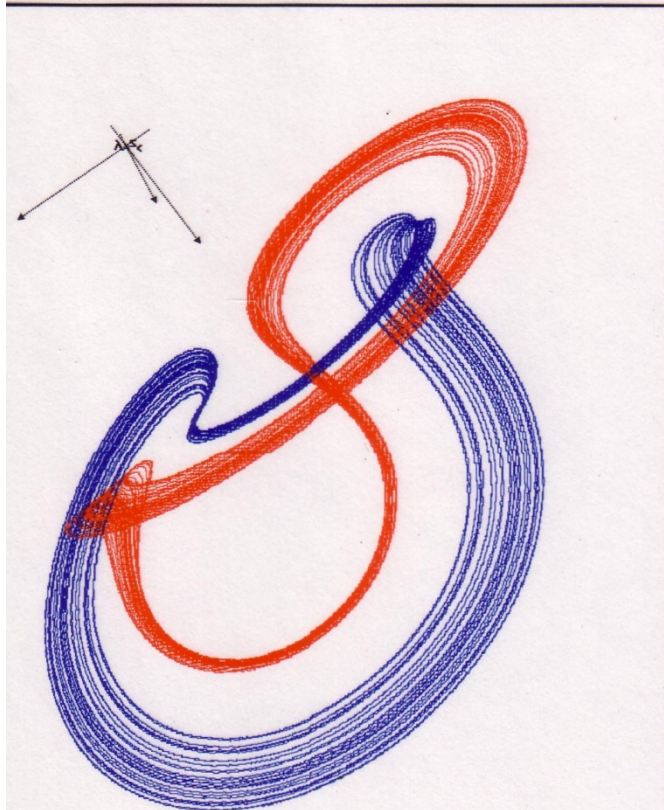


$r=28$





Edward Norton
Lorenz
1917-2008
Американский
математик и
метеоролог
Один из основателей
теории хаоса

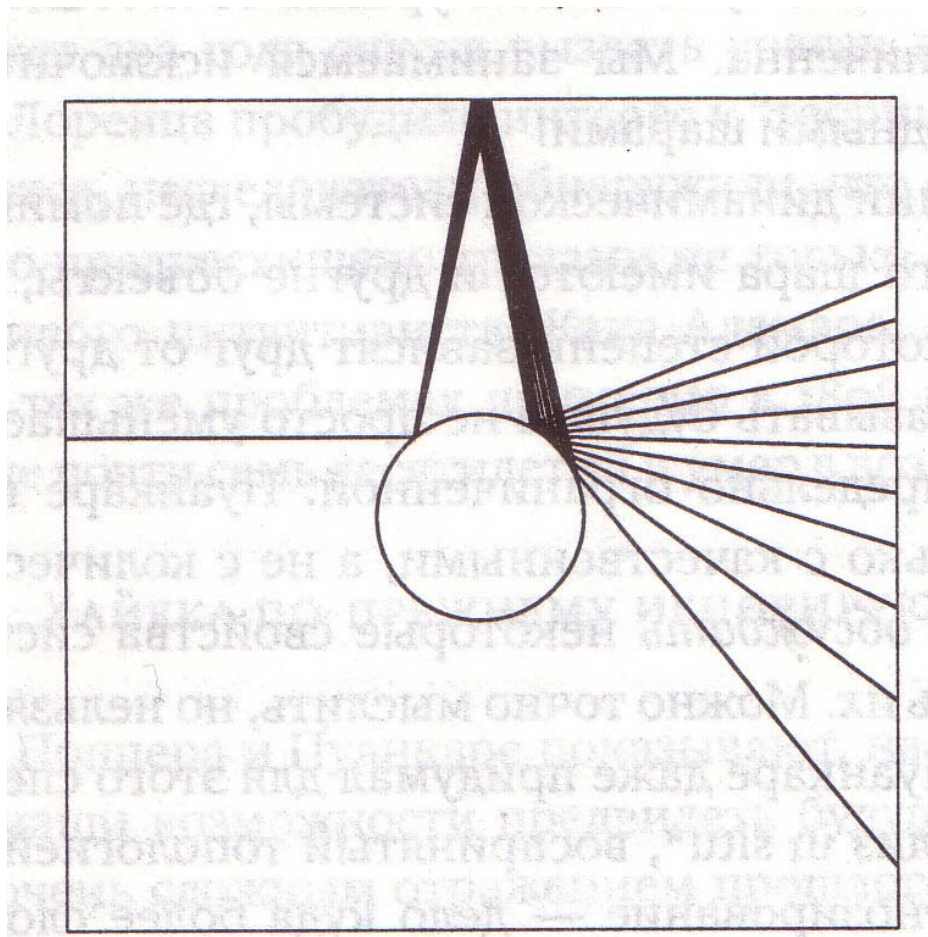


Хаотическое поведение возникает

- ☐ ● не из-за внешних источников шума (их нет в системе Лоренца);
- ☐ ● не из-за бесконечного количества степеней свободы (их три в системе Лоренца);
- ☐ ● не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические).

Настоящая причина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства

Разбегание траекторий



Хаотическое поведение означает

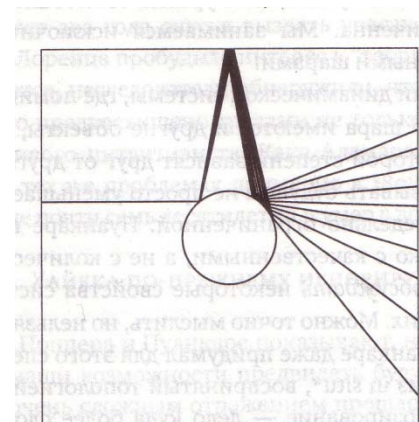
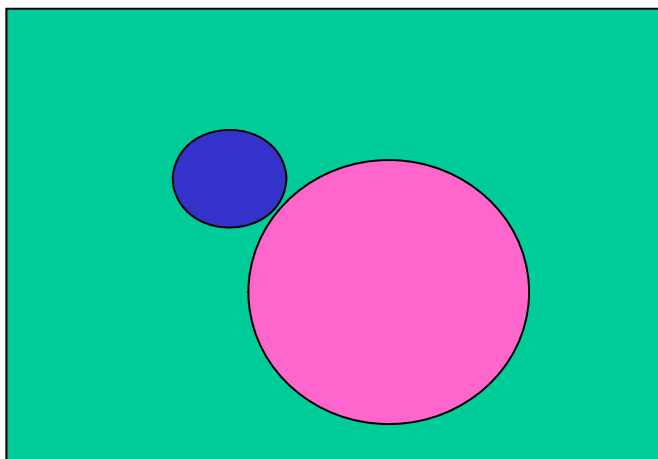
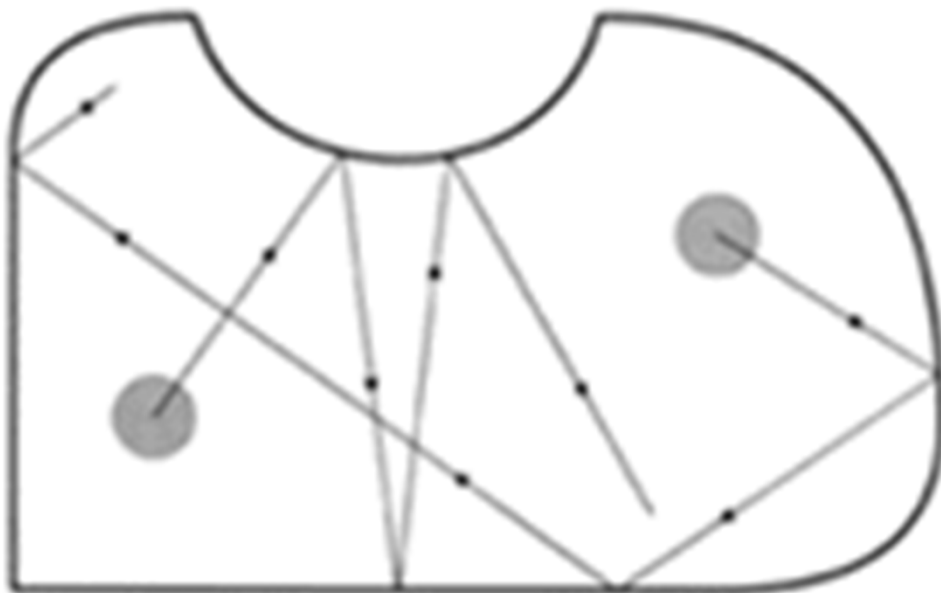
- *неустойчивость фазовых траекторий,*
- *рост малого начального возмущения во времени,*
- *перемешивание элементов фазового объема, и, как следствие,*
- *непредсказуемость поведения системы на больших временах*

Биллиард Синая



Яков Григорьевич
Синай

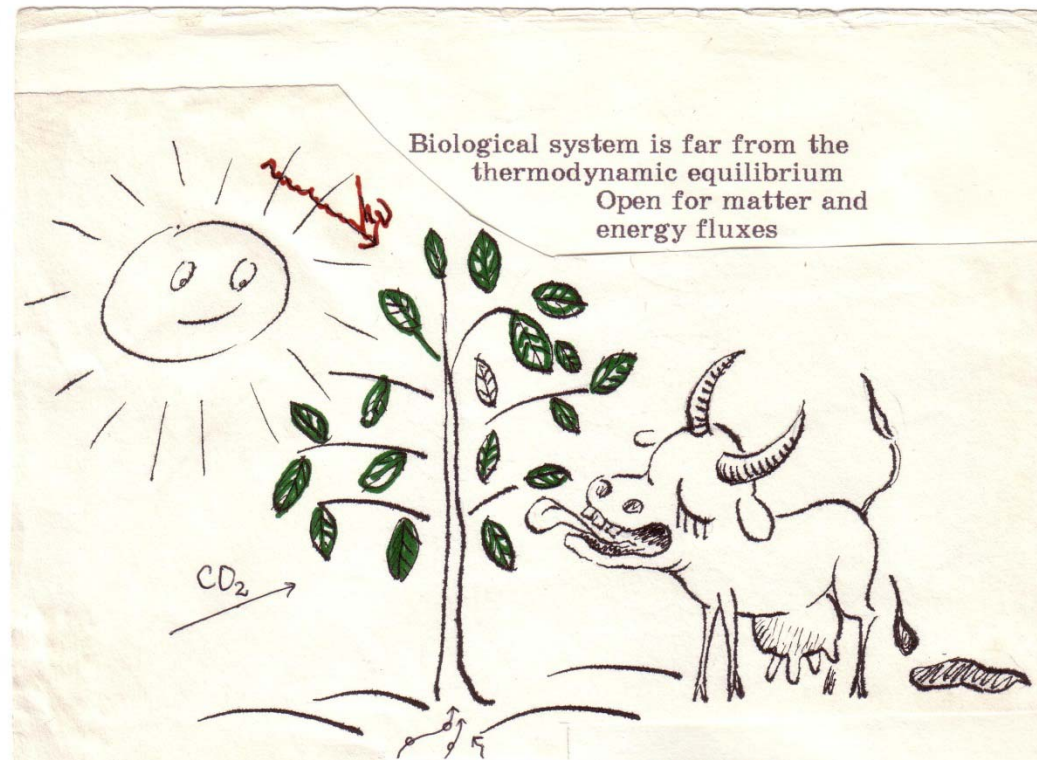
Профессор Мехмата МГУ.
Работы по теории
динамических систем,
статистической физике



НЕЛИНЕЙНОСТЬ

- является необходимым (но не достаточным) условием существования динамического (детерминированного) хаоса

Линейные дифференциальные и разностные уравнения не приводят к хаосу.



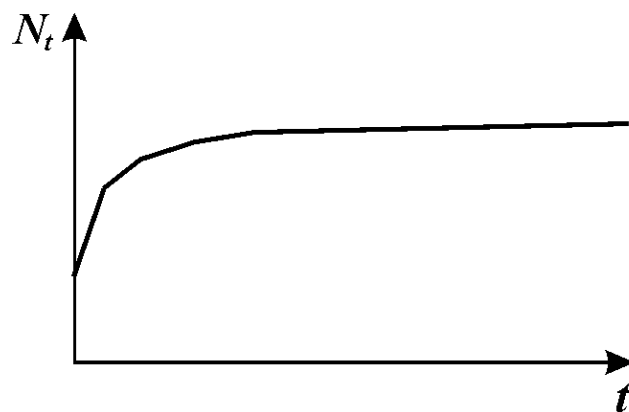
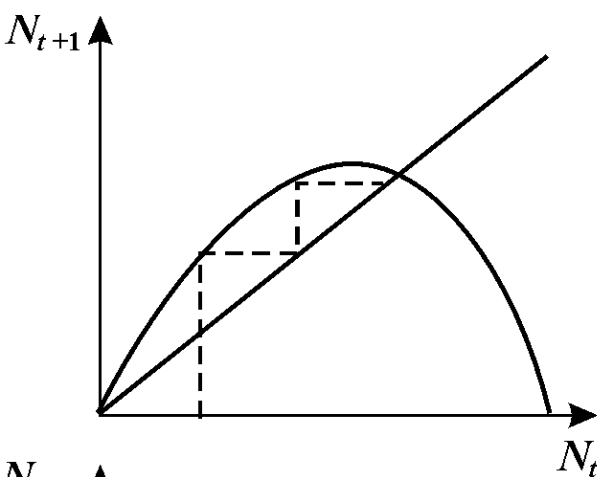
Детерминированные системы

однозначно задан закон изменения системы с течением времени.

Детерминированность означает, что зависимость будущего состояния $x(t)$ можно записать в виде:

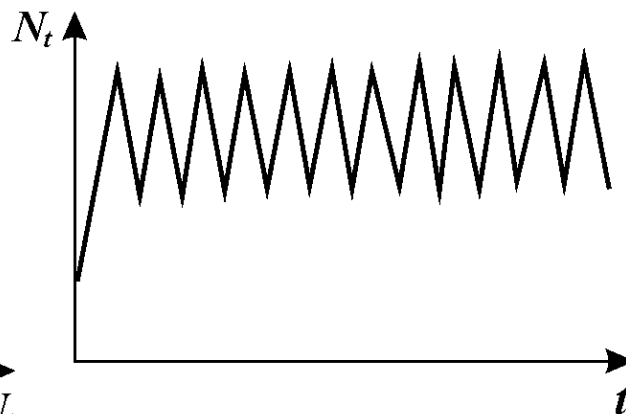
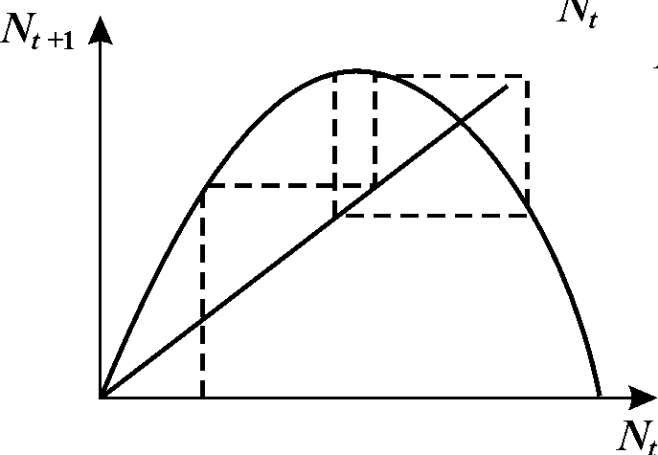
$$x(t) = F [x(t_0)] .$$

Здесь F – детерминированный закон (оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$.

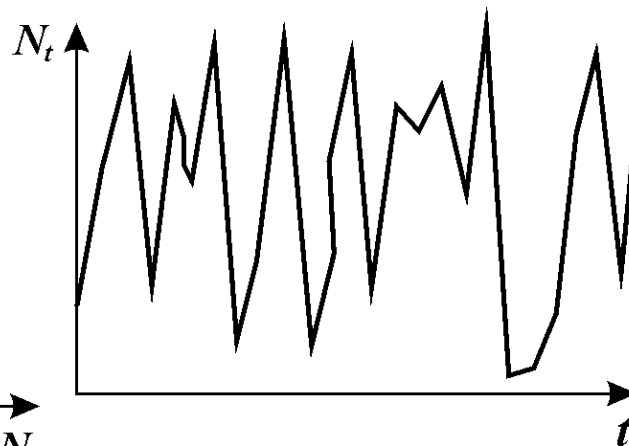
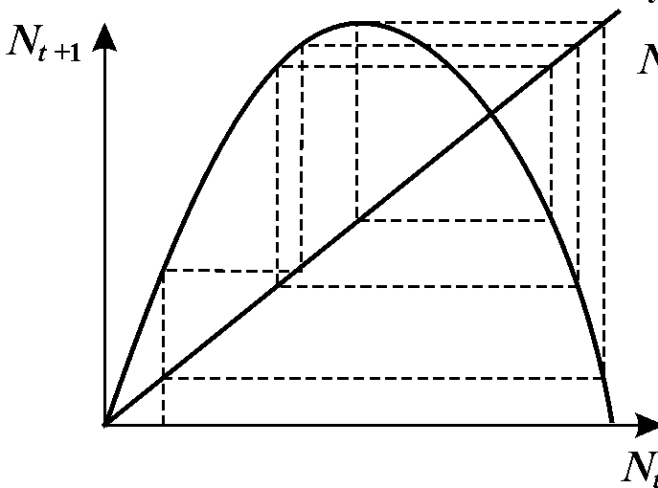


a Квадратичное
отображение

$$N_{t+1} = aN_t(1 - N_t)$$



б

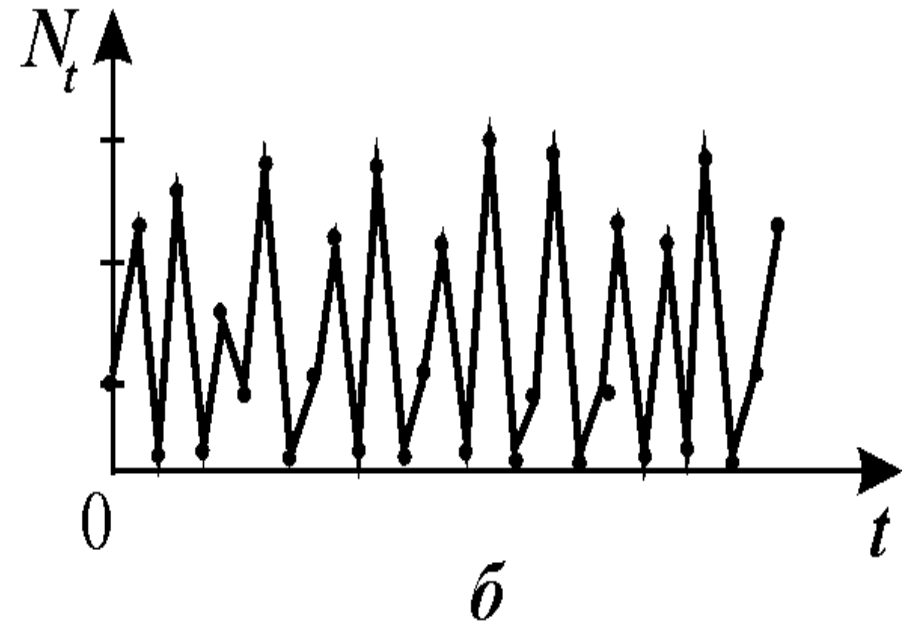
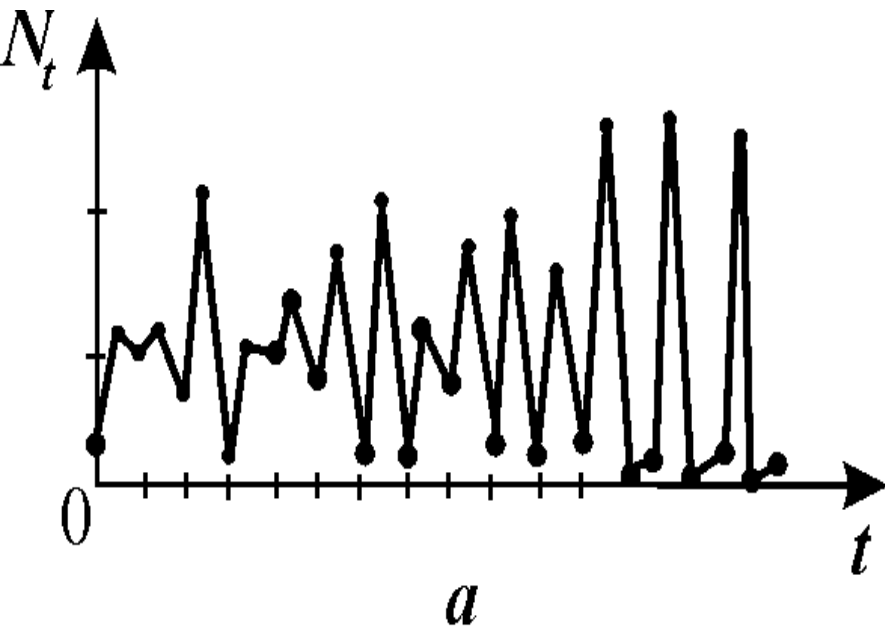


в

Пример
детерминиро-
ванного
хаоса

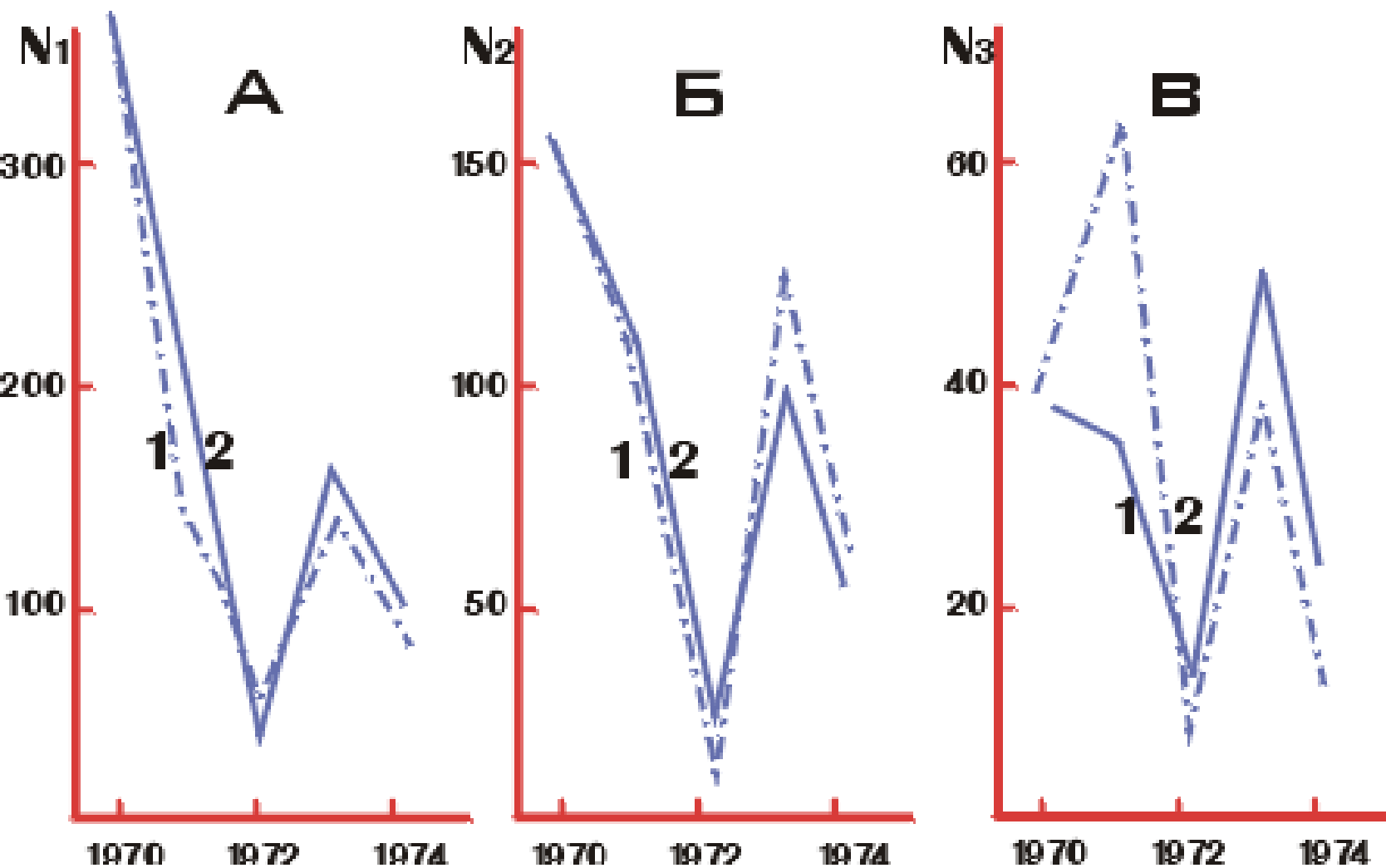
$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right\}$$

Дискретный аналог
логистического уравнения

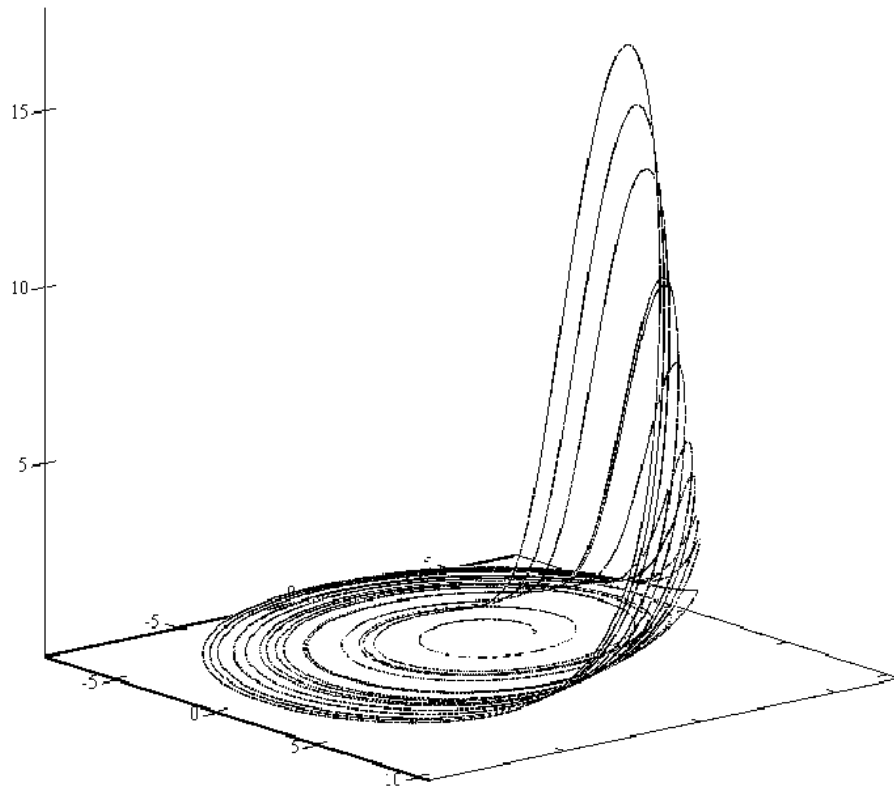


При $r > r_c = 3,102$ решение зависит от начальных условий существуют *трехточечные циклы* и *квазистокастические решения*.

Динамика биомассы овсеца



Хаос в непрерывной системе. Аттрактор Ресслера



$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(x + y), \\ \dot{y} &= x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \alpha + z(x - \mu).\end{aligned}$$

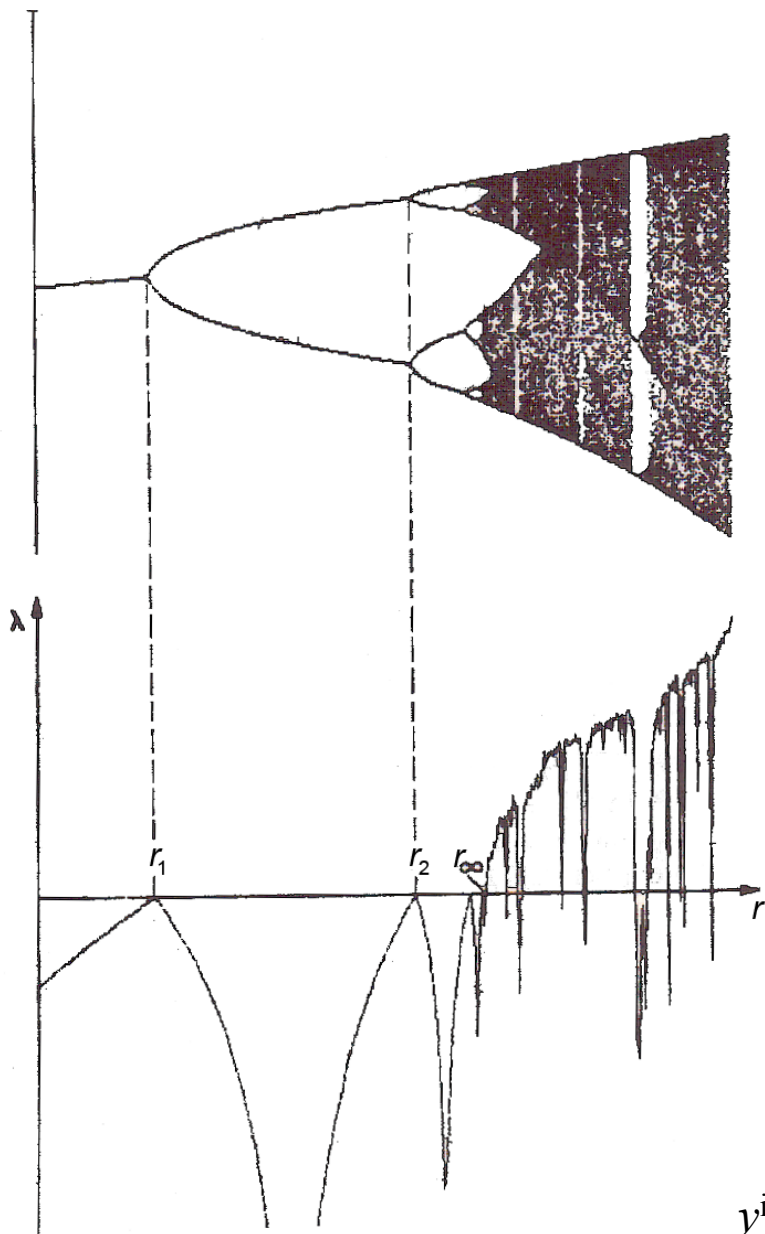
Устойчивость и неустойчивость движения

Устойчивость по Ляпунову

Для *устойчивого по Ляпунову* движения малое начальное возмущение не нарастает. Т.е. *движение устойчиво по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что для всякого движения $\mathbf{x}(t)$, для которого $||\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)|| < \delta$, при всех $t > t_0$ выполняется неравенство: $||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)|| < \varepsilon$.

Знак $|| \quad ||$ означает норму (длину) вектора.

Сценарий удвоения предельного цикла

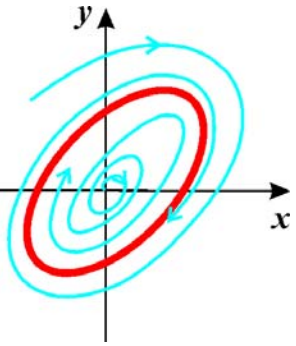


Показатель Ляпунова —
характеризует
устойчивость
траектории

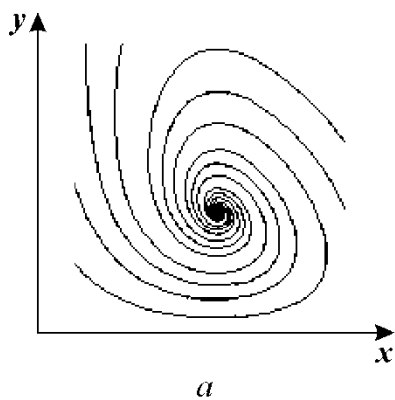
$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \|y^i(t)\|.$$

$y^i(t)$ — величина возмущения

Устойчивость по Пуассону



предполагает, что соответствующая фазовая траектория при $t \rightarrow \infty$ не покидает ограниченной области фазового пространства. Находясь в этой области бесконечно долго, она неизбежно будет возвращаться в сколь угодно малую окрестность начальной точки. Времена возврата могут соответствовать *периоду* или *квазипериоду* при регулярном движении, а могут представлять собой случайную последовательность, если решение отвечает режиму динамического хаоса.



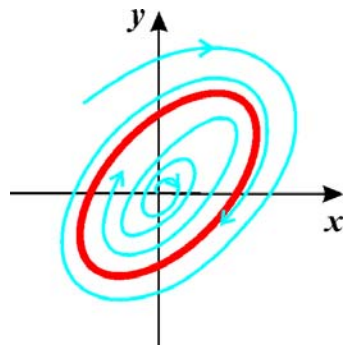
Устойчивый
фокус



Устойчивый узел

Аттрактор.

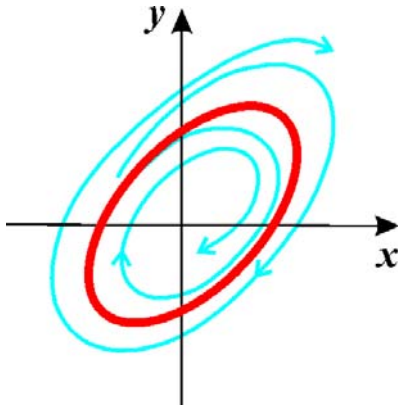
- Если все точки множества V будут принадлежать L при $t \rightarrow +\infty$, то L – *притягивающее предельное множество, или аттрактор*. Тогда V – *бассейн притяжения аттрактора* (подобно бассейну реки – территории, с которой она собирает свои воды).



Устойчивый
предельный цикл

Репеллер

- Если все точки множества V будут принадлежать L при $t \rightarrow -\infty$, то L — отталкивающее предельное множество, или *репеллер*.



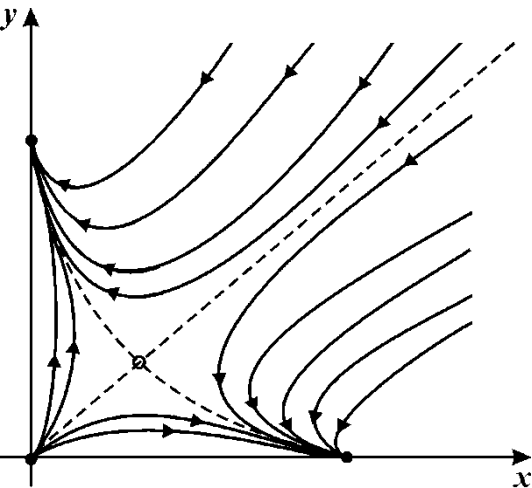
Неустойчивый
предельный цикл

Неустойчивый узел,

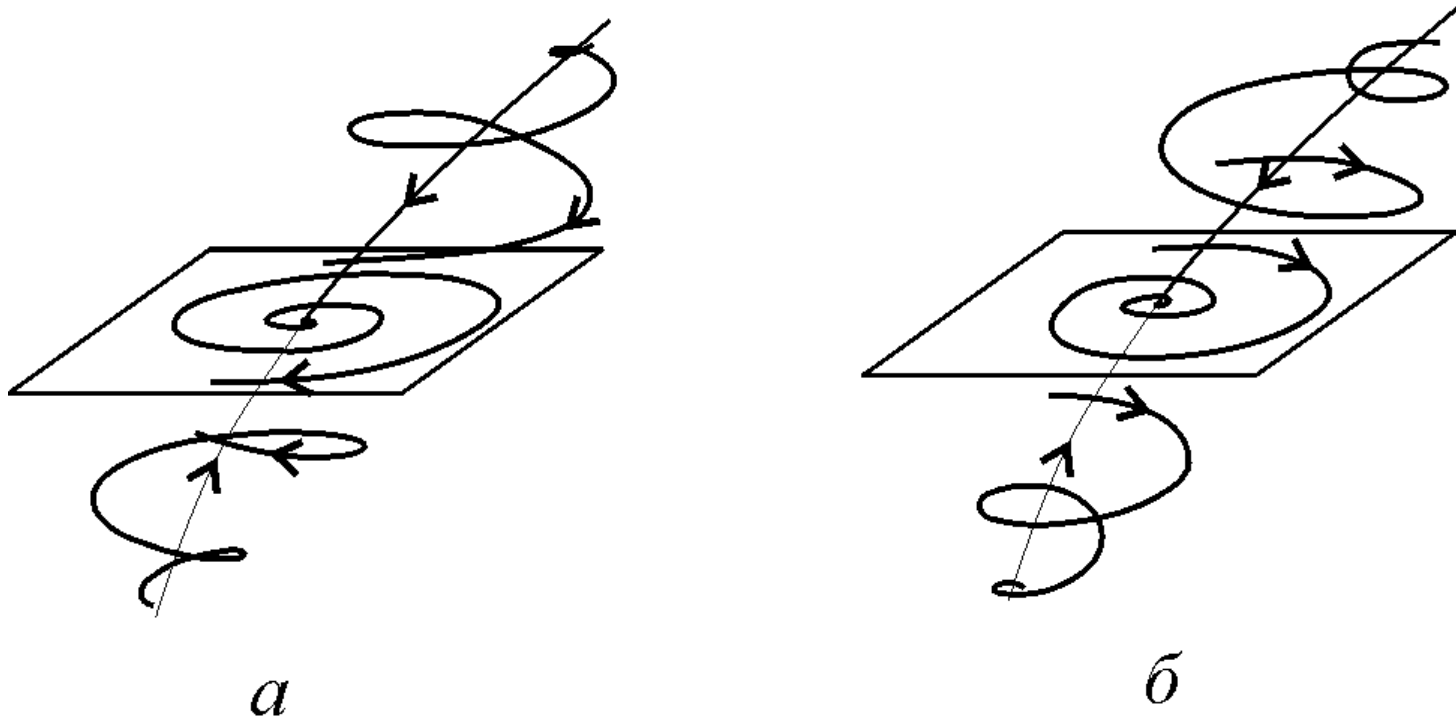
Неустойчивый фокус

Седловое множество

- Если множество V состоит из двух подмножеств $V = W^s \cup W^u$, причем точки, принадлежащие W^s , стремятся к L в прямом времени, а точки, принадлежащие W^u , стремятся к L в обратном времени, тогда L называется *седловым предельным множеством (или седлом)*. Множества W^s и W^u – устойчивое и неустойчивое многообразия седла.



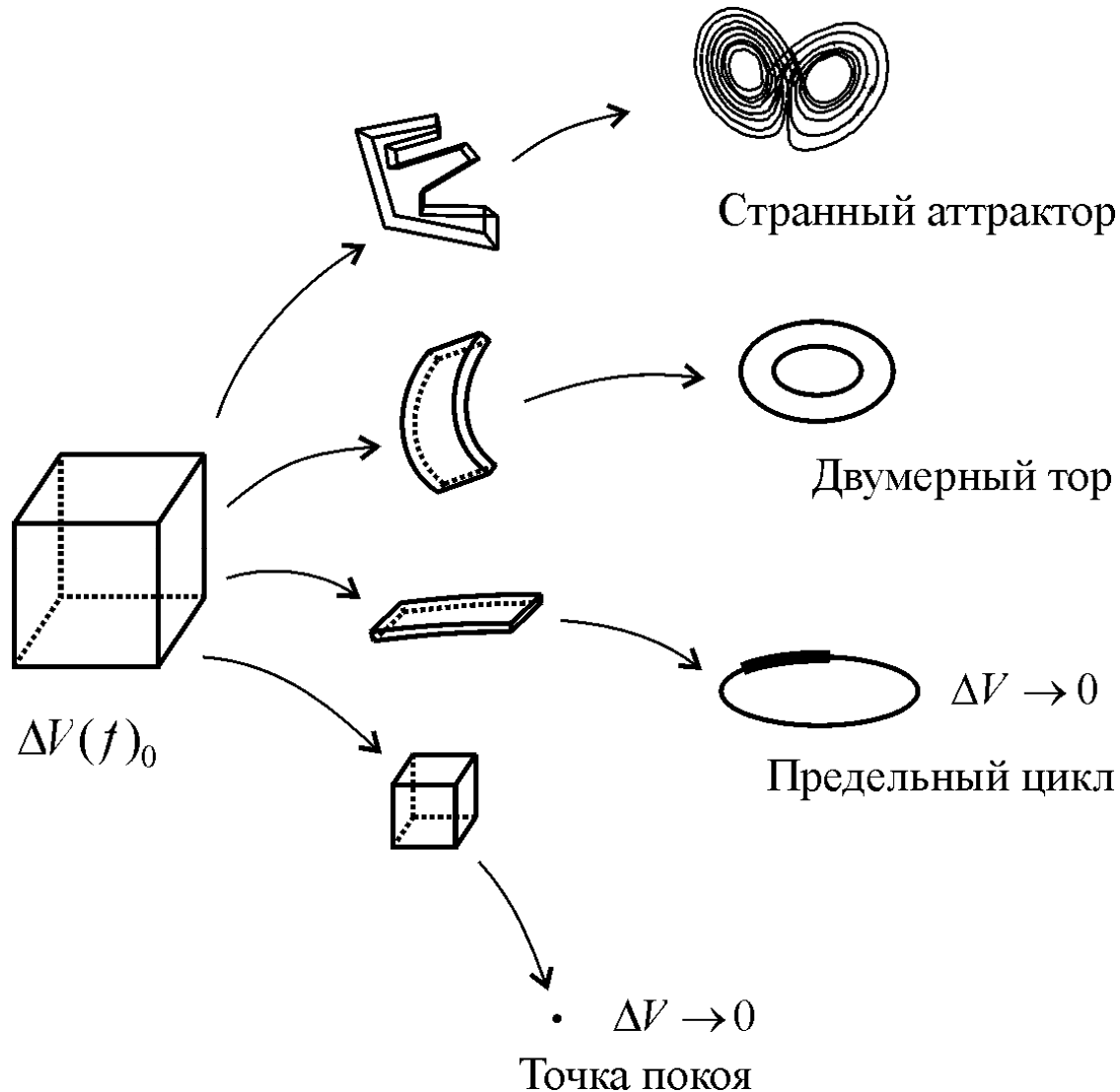
Седло-фокусы



Седло-фокусы в пространстве $N = 3$.

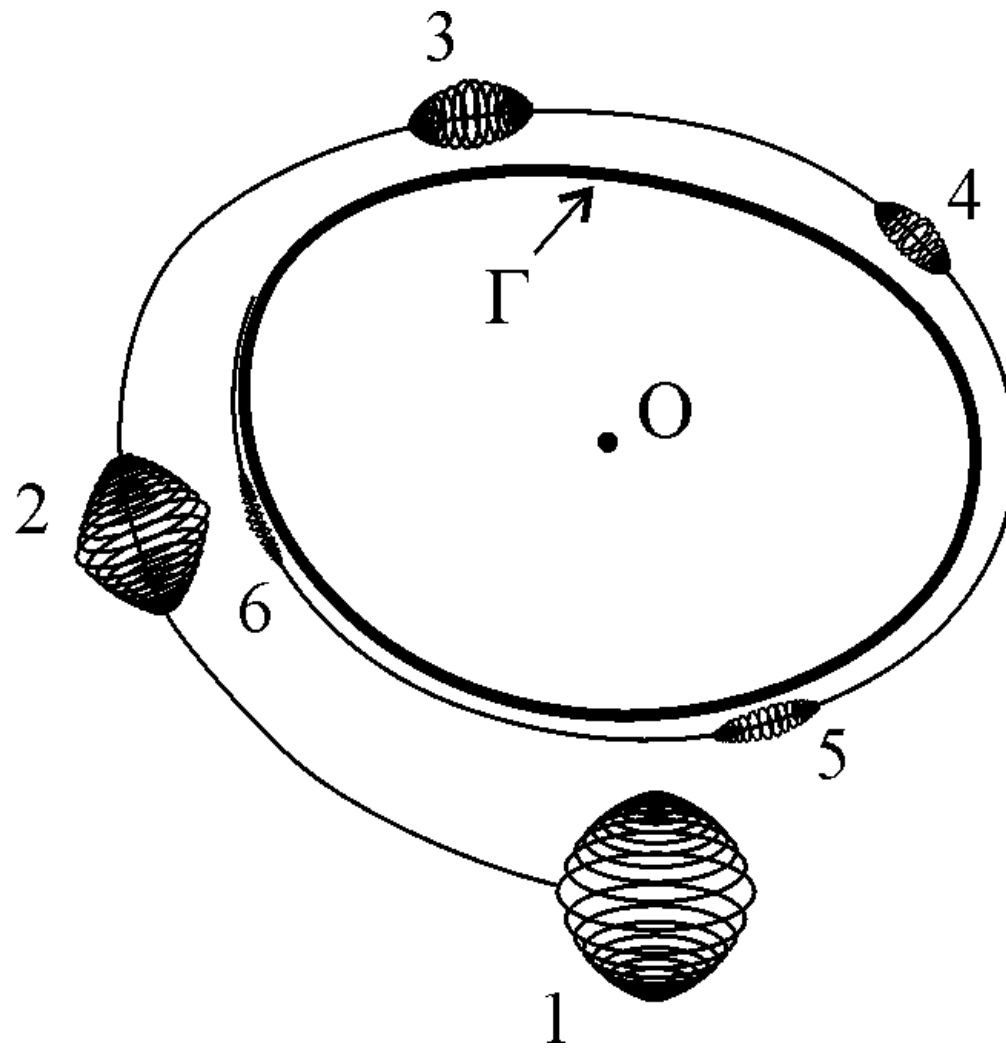
а) p_1 — действительно и отрицательно, $p_{2,3}$ — комплексно сопряженные, $\operatorname{Re} p_{2,3} > 0$; б) p_1 — действительно и положительно, $p_{2,3}$ — комплексно сопряженные, $\operatorname{Re} p_{2,3} < 0$

Диссипативные системы

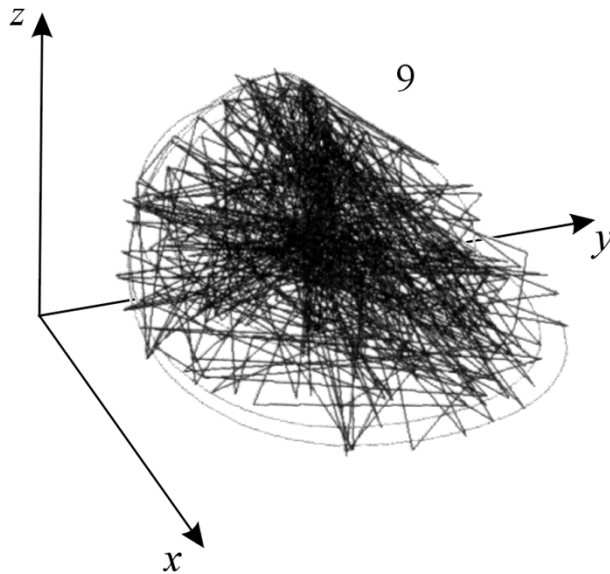
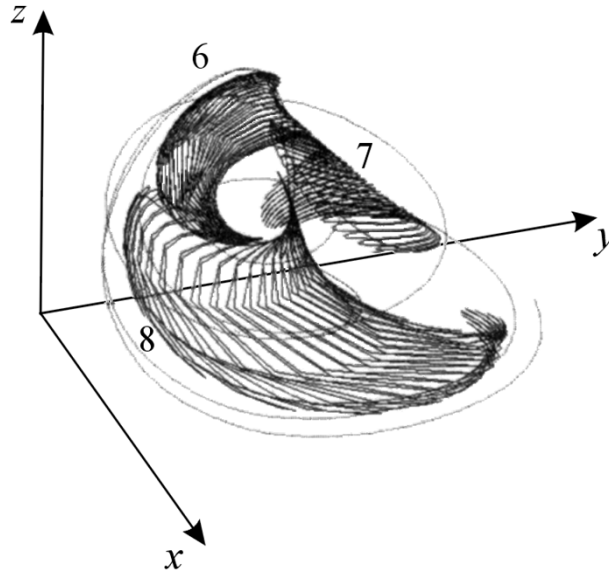
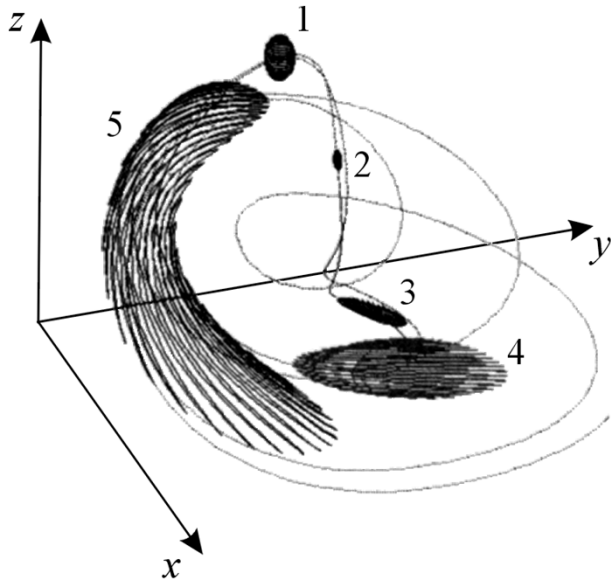


Существование аттрактора в диссипативной системе связано со свойством сжатия элемента фазового объема под действием оператора эволюции.

Сжатие элемента фазового пространства радиуса ε
при «наматывании» траектории на устойчивый
предельный цикл - траектория Γ .



Эволюция малого
первоначального
фазового объема во
времени в
динамической
системе
(Анищенко и др.,
1999).



$$\dot{x} = mx + y - xz,$$

$$\dot{y} = -x,$$

$$\dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad I = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Фракталы — самоподобные множества



Benoît Mandelbrot 1924-2009



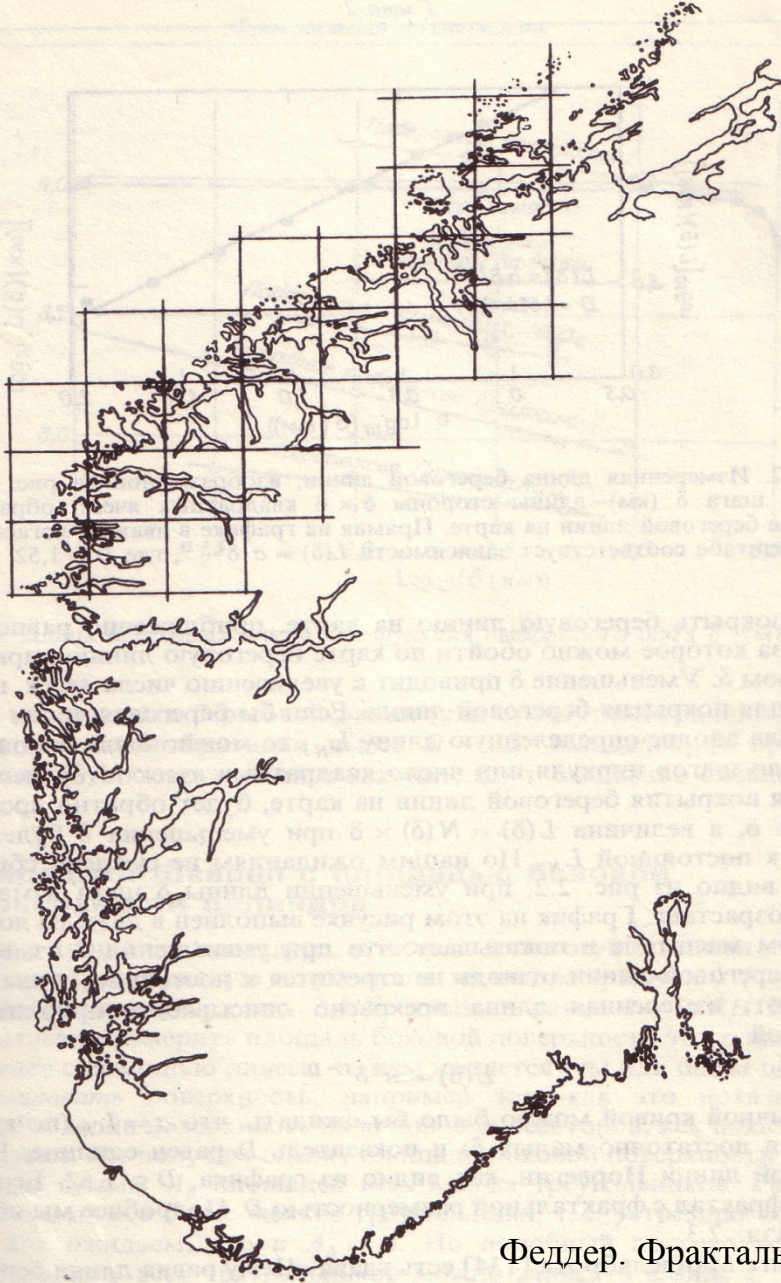
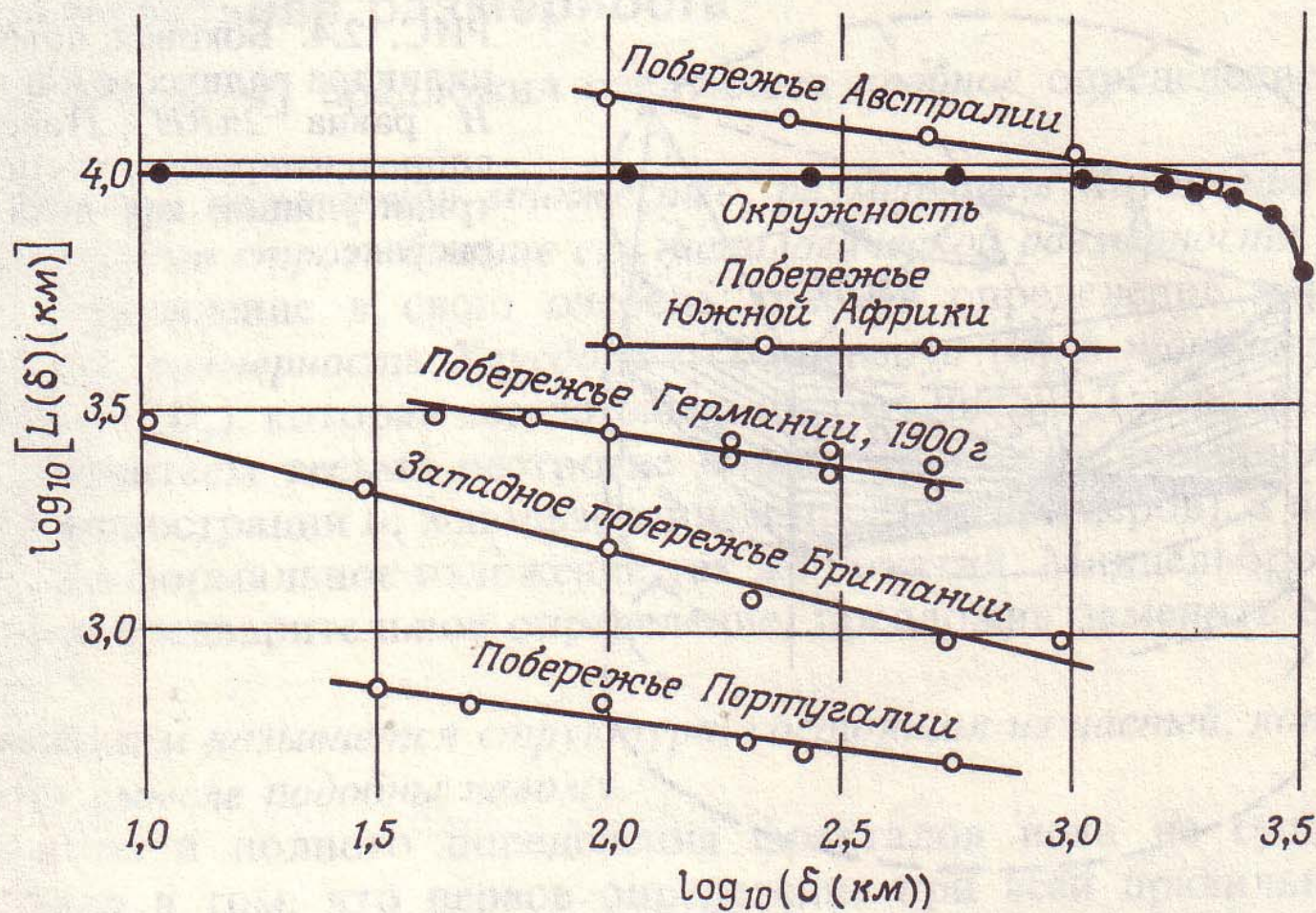


РИС. 2.1. Побережье южной части Норвегии. Береговая линия перечерчена из географического атласа и представлена в цифровом виде с помощью раstra, состоящего примерно из 1800×1200 ячеек. Изображенная сверху квадратная решетка имеет шаг $\delta \sim 50$ км.



Бенуа Мальдельброт.
1924-2010. Французский и
американский математик.
Придумал понятие
«фрактал» - “Fractus”
(лат) – сломанный,
разбитый.
«Фрактальная геометрия
природы». ИКИ-РХД,
2002

Длина береговых линий



С. 2.3. Длина береговых линий как функция выбранного шага δ (км) [134].

Фракталы. Размерность



Хаусдорф Феликс
(Hausdorff Felix, 1868-1942)
—немецкий математик один
из основоположников
современной топологии.
Писатель.
Псевдоним Поль Монгре

Длина береговой линии стремится к величине

$$L(\delta) = a\delta^{1-D}$$

$$N(\delta) \sim 1/\delta^D$$

Для обычной кривой множитель a равен количеству отрезков: $a=L_N$, а показатель D равен единице. Но для береговой линии Норвегии $D \sim 1,52$. Показатель D называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича или фрактальной размерностью.

Альвеолы человеческого легкого

Оптическая
микроскопия – 80 кв. м
Электронная
микроскопия – 140 кв. м
 $D=2,17$



Мембраны

Субклеточные мембраны в клетках печени

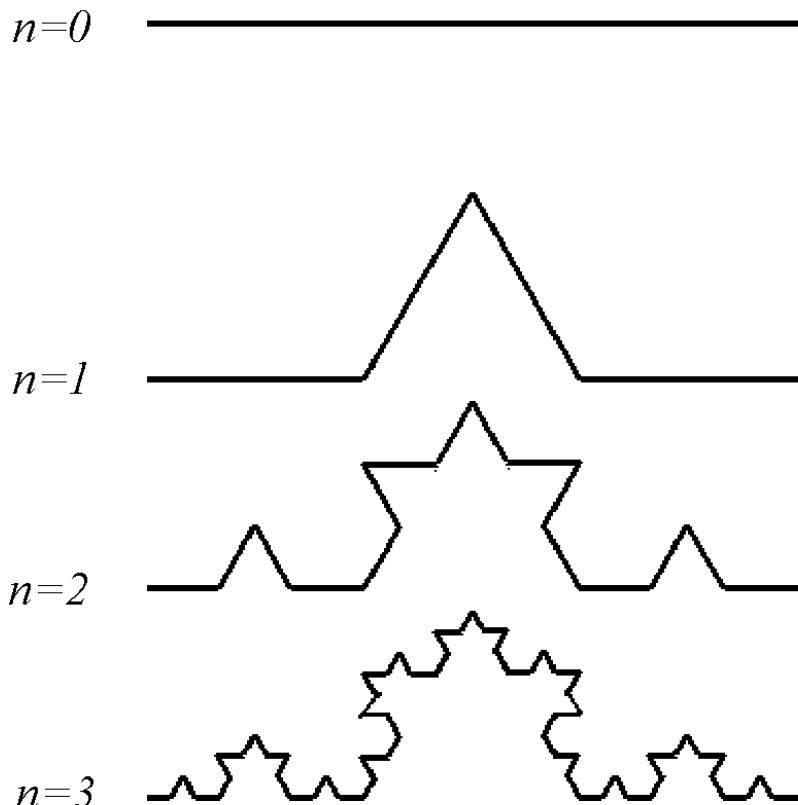
Внешние митохондриальные мембраны $D=2,09$

Внутренние митохондриальные мембраны $D=2,53$



Кривая Коха.

Первые четыре шага построения.



фон Кох Нильс Фабьян Хельге (1870-1924),
шведский математик, автор основополагающих
работ по теории чисел

Длина кривой 1-го поколения $L(1/3) = 4/3$.
4 звена, длина каждого – $1/3$

Длина кривой 2-го поколения.

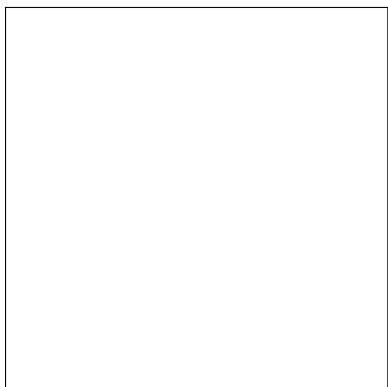
Число звеньев: $N=4^2=16$, длина каждого – $1/9$

Длина каждого звена: $\delta=3^{-n}$
 $n=-\ln \delta / \ln 3$

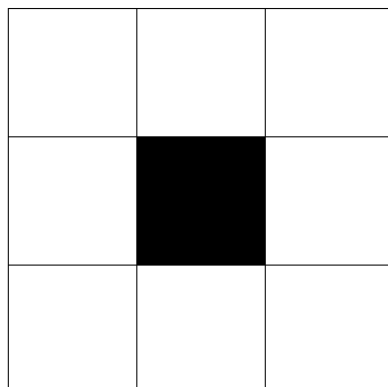
$L(\delta) = (4/3)^n = \delta^{1-D}$ $D=\ln 4 / \ln 3 \sim 1,2628$

Построение ковра Серпинского. Начальный элемент – белый квадрат со стороной, равной 1. Из него вырезается черный квадрат, со стороной, равной $1/3$. Далее из каждого белого квадрата вырезается снова черный квадрат, со стороной, равной $1/3$ стороны белого квадрата. На рисунке показаны четыре поколения предфракталов. Размерность подобия $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89 \dots$

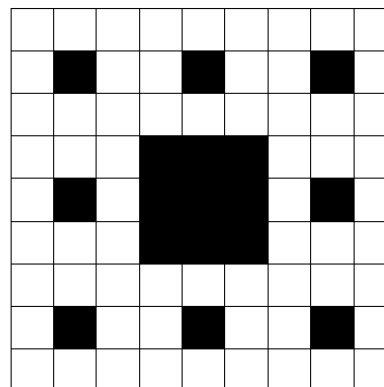
$n=0$



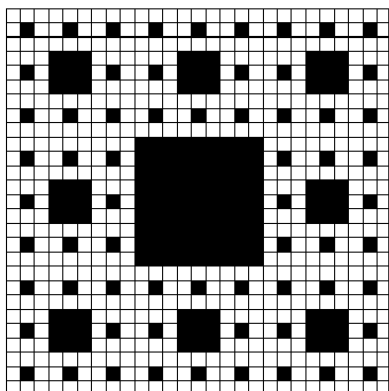
$n=1$



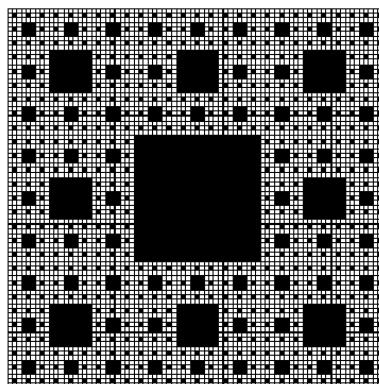
$n=2$



$n=3$



$n=4$



Вацлав Серпинский (1882-1969) – польский математик. Основные труды посвящены теории множеств. Теории чисел, топологии

Glycolysis with periodic substrate input flux

$$\begin{aligned}\frac{d[\text{F6P}]}{dt} &= \frac{d[\text{PEP}]}{dt} + \frac{d[\text{ATP}]}{dt} \\ &= \bar{V}_{in} + A \sin \omega_e t - V_{\text{PFK}} \\ \frac{d[\text{ADP}]}{dt} &= - \frac{d[\text{ATP}]}{dt} = V_{\text{PFK}} - V_{\text{PK}}\end{aligned}$$

F6P – fructose 6 phosphate

PEP – phosphoenolpyruvate

$\bar{V}_{in}$ - the mean input flux

ω_e - frequency of the periodic input flux

$$A = \bar{V}_{in}$$

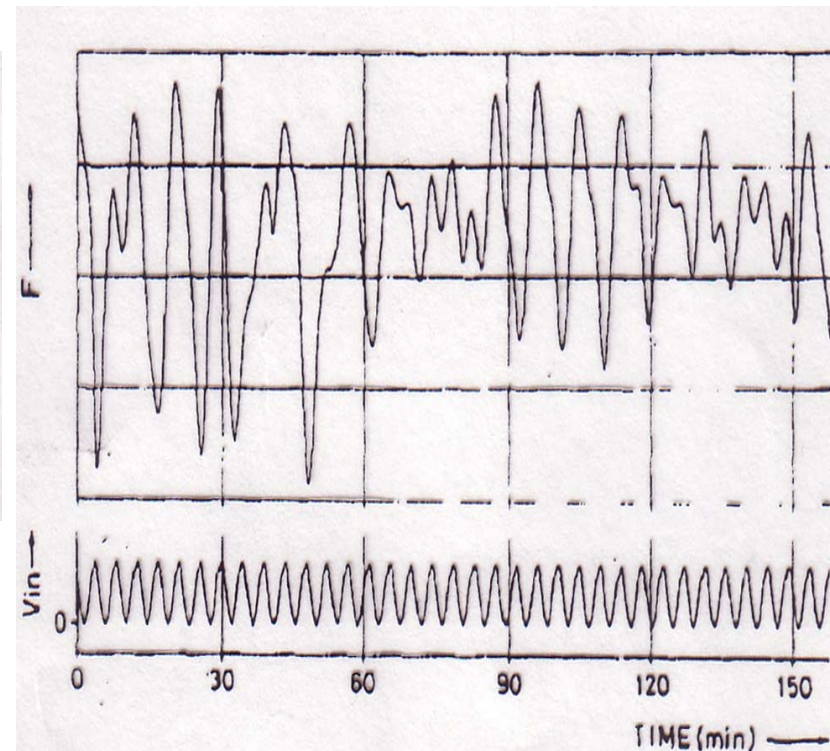
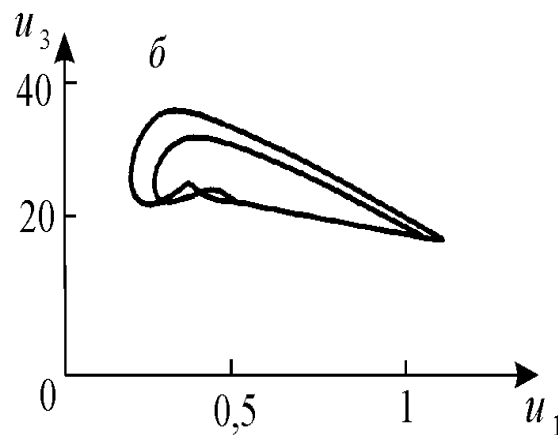
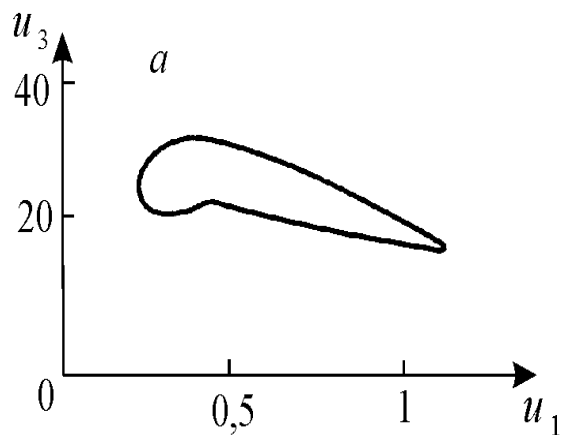
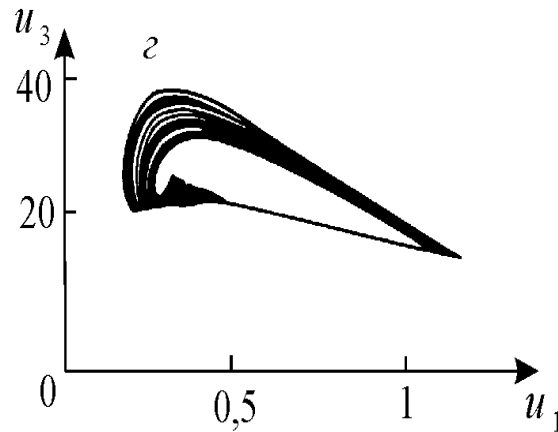
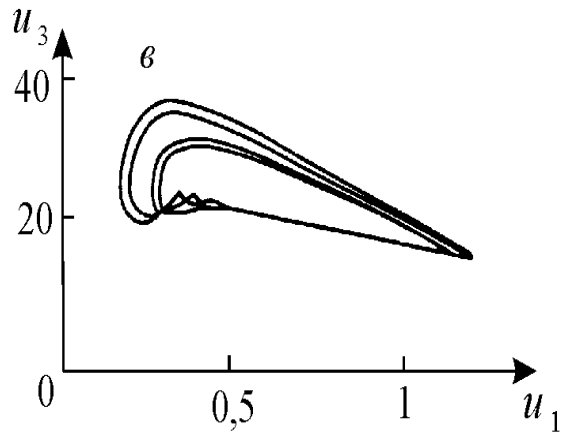


Fig. 2. Measured NADH fluorescence (upper curve) of yeast extract under sinusoidal glucose input flux (lower curve).



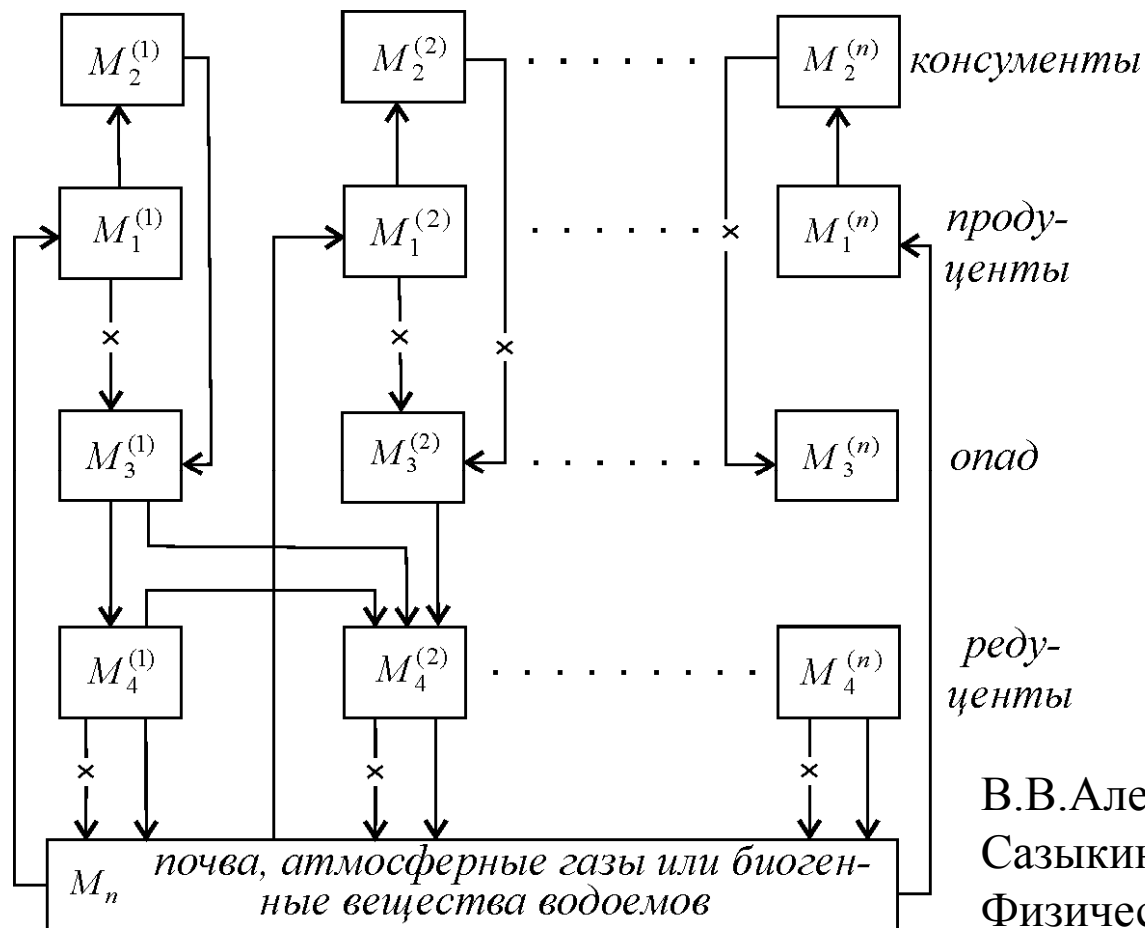
Странный
аттрактор в
системе хищник
— две жертвы



$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= u_1(\alpha_1 - u_1 - 6u_2 - 4u_3), \\ \frac{du_2}{dt} &= u_2(\alpha_2 - u_2 - u_1 - 10u_3), \\ \frac{du_3}{dt} &= u_3(-1 + 0.25u_1 + 4u_2 - u_3).\end{aligned}$$

Система, описывающая взаимодействие трех видов: хищник - две жертвы (А.Д. Базыкин, Е.Апони́на, Ю.Апони́н, 1985). При уменьшении параметра скорости роста первой жертвы происходит усложнение траектории (последовательное удвоение предельного цикла) $a - г$. Колебательная динамика переходит в квазистохастическую

Схема потоков вещества по трофическим пирамидам в замкнутой экосистеме



**Вячеслав Викторович
Алексеев (1940-2007)**

Физик, эколог, геофизик.
Динамика процессов в
замкнутых экосистемах.
Возобновляемые
источники энергии

В.В.Алексеев, Крышев И.И.,
Сазыкина Т.Г.
Физическое и математическое
моделирование экосистем, 1992

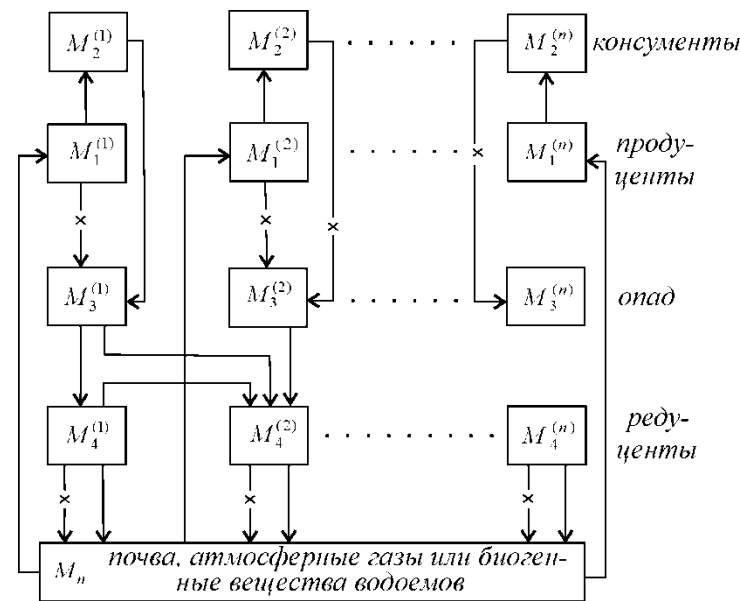
Система уравнений

$$dM_1^{(i)} / dt = -\varepsilon_1^{(i)} M_1^{(i)} + \gamma_1^{(i)} M_1^{(i)} M_{\Pi},$$

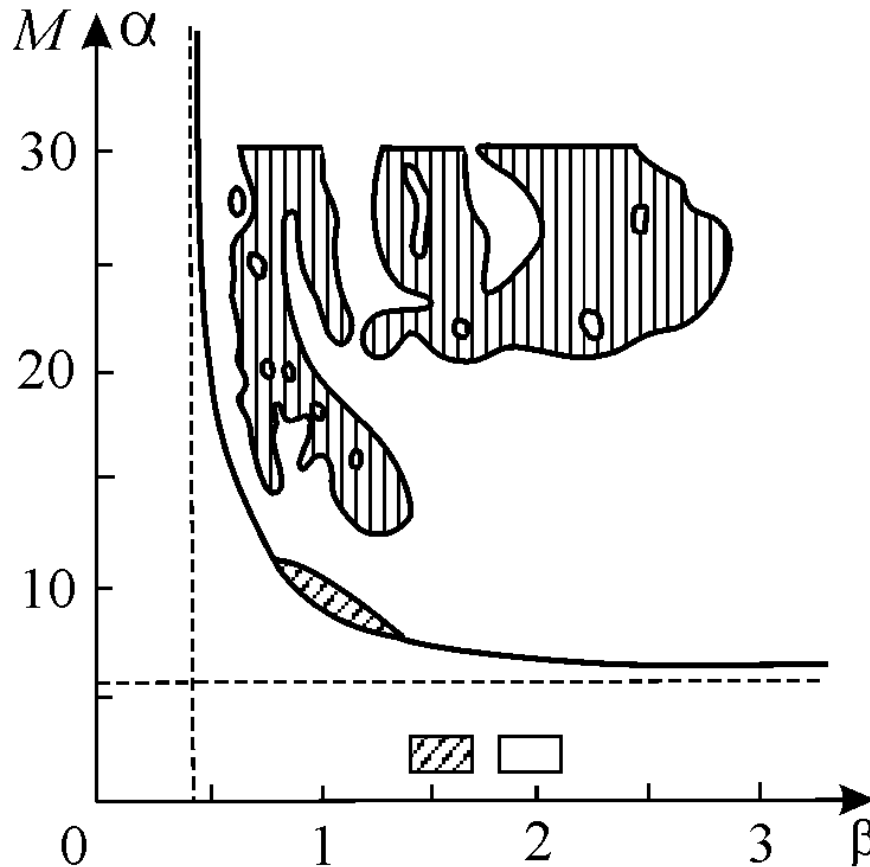
$$dM_2^{(i)} / dt = -\varepsilon_1^{(i)} M_1^{(i)} - \sum_{k=1}^n \gamma_2^{(ik)} M_2^{(i)} M_3^{(k)},$$

$$dM_3^{(i)} / dt = -\varepsilon_3^{(i)} + \sum_{k=1}^n \gamma_3^{(ik)} M_2^{(i)} M_3^{(i)},$$

$$dM_{\Pi} / dt = \sum_{i=1}^n \left[\varepsilon_3^{(i)} M^{(i)} + \sum_{k=1}^n \left(\gamma_2^{(ik)} - \gamma_3^{ik} \right) M_2^{(i)} M_3^{(k)} - \gamma_1^i M_1^{(i)} M_{\Pi} \right].$$



Области стохастичности (штриховка) для системы два хищника – две жертвы

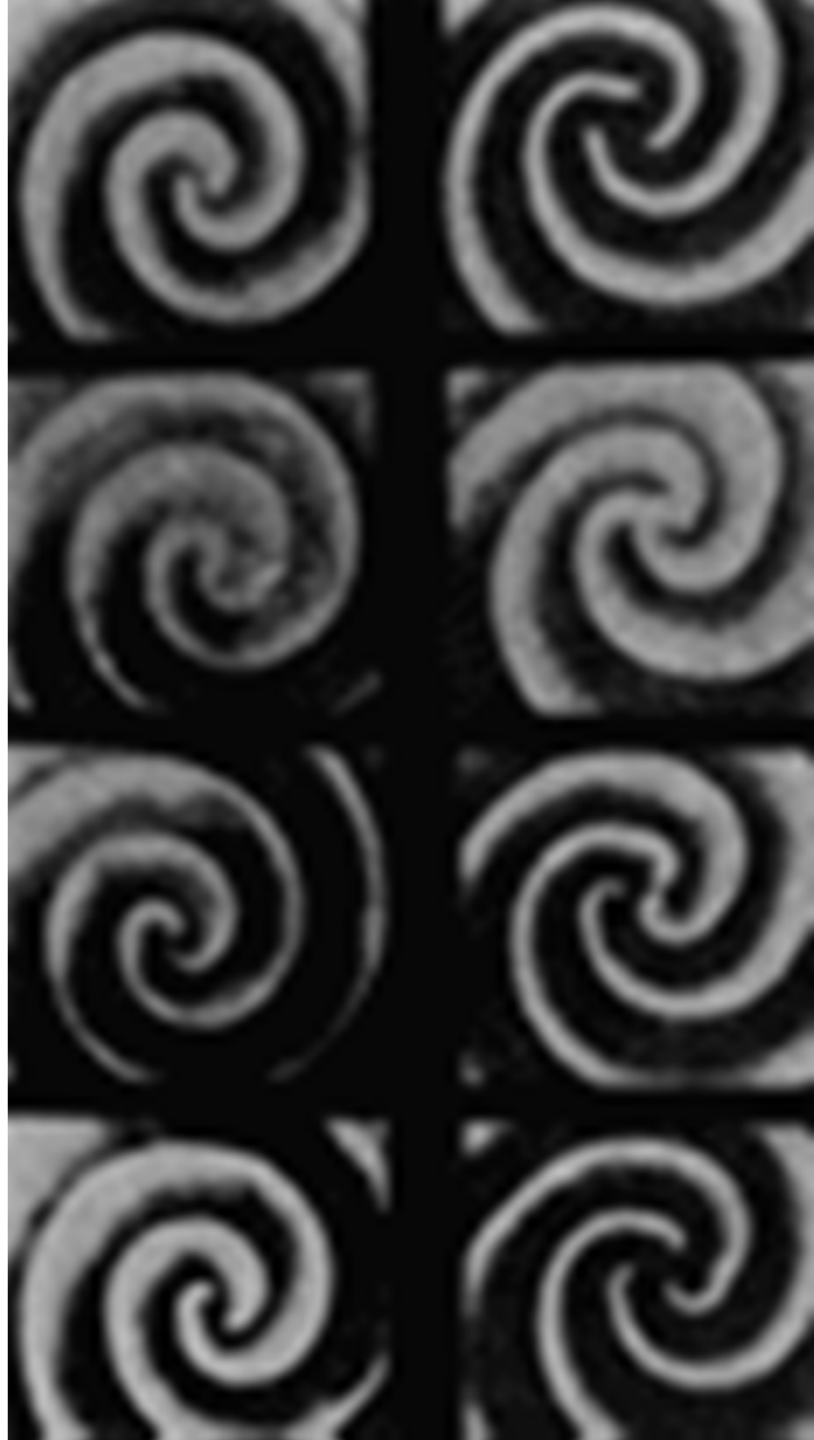


**Александр Юрьевич
Лоскутов (1960 – 2011)**
Профессор физического
факультета МГУ

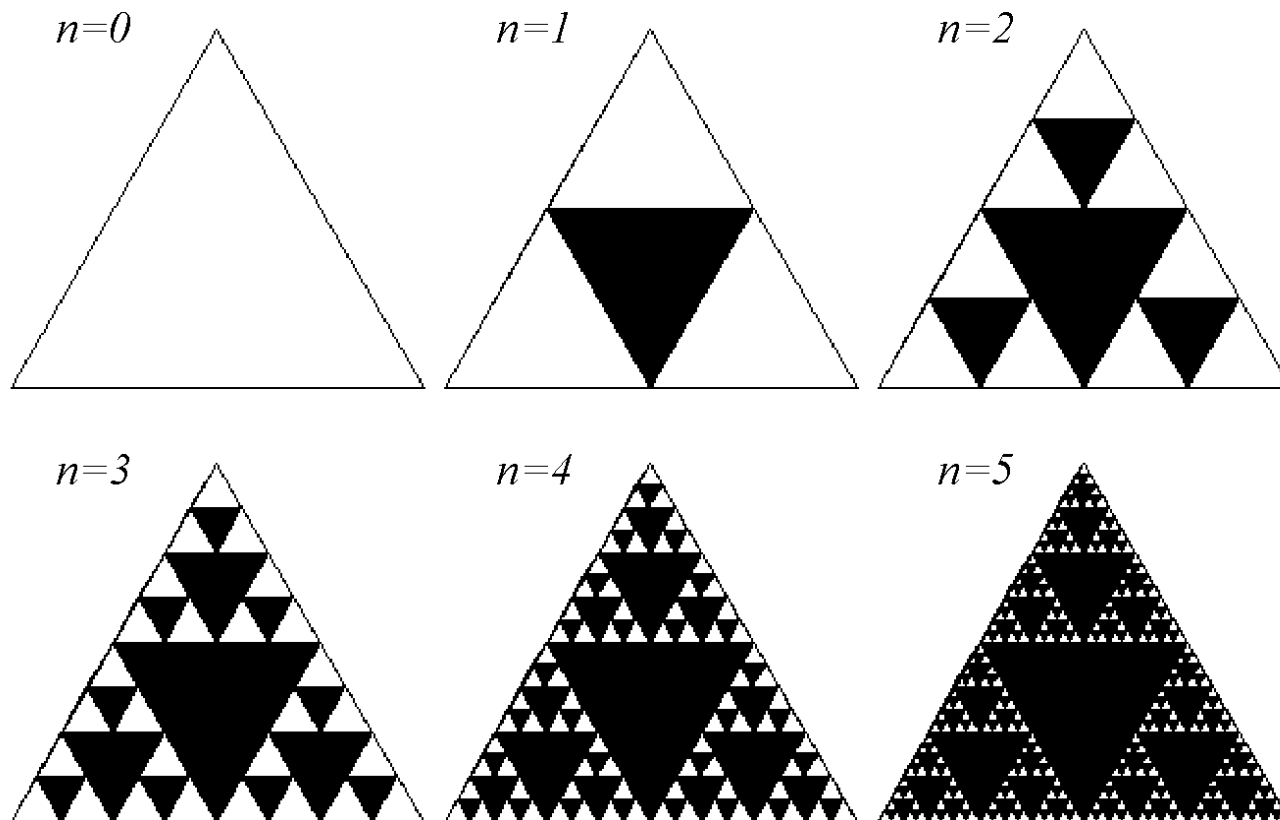
В.В.Алексеев, А.Ю.Лоскутов. О возможности управления системы со странным аттрактором. Проблемы экологического мониторинга, 1985

Подавление хаоса и управление хаосом

А.Ю.Лоскутов,
А.С.Михайлов.
Основы теории
сложных систем
ИКИ-РХД, 2007



Построение треугольной салфетки Серпинского. Начальный элемент – треугольник со всеми внутренними точками. Образующий элемент исключает из него центральный треугольник. На рисунке показаны пять поколений предфракталов. Фрактальное множество получается в пределе при бесконечно большом числе поколений и имеет фрактальную размерность $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,58\dots$



Канторово множество названо в честь великого математика
 Георга Кантора (1845-1918), открывшего его в 1883 г.
 Построение кривой Коха можно рассматривать как процесс
 добавления к отрезку все более мелких деталей. Построение
 канторова множества сводится к выбрасыванию из
 первоначального отрезка все более мелких отрезков

