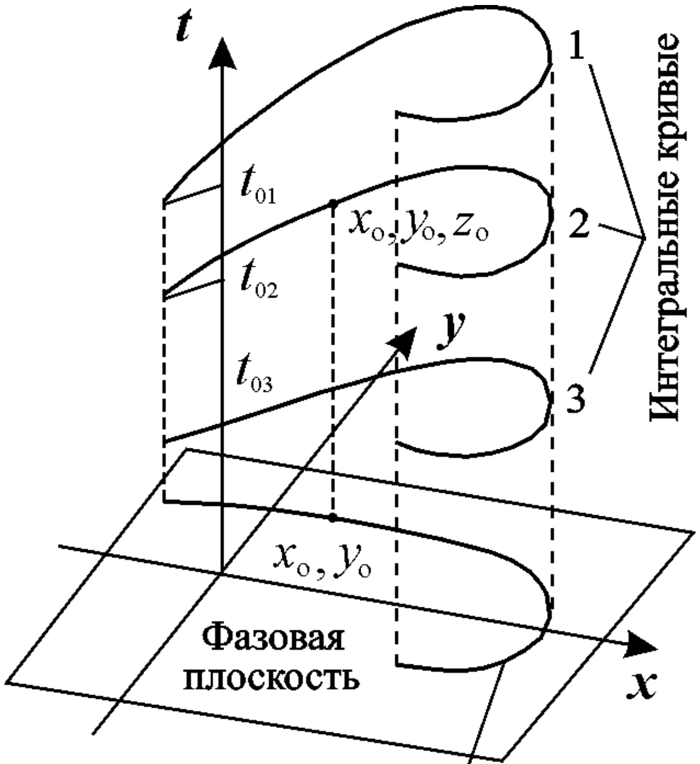
Фазовая плоскость

Качественное исследование

Анализ устойчивости стационарного состояния системы двух автономных дифференциальных уравнений

Траектории системы в пространстве (x,y,t)



Жюль Анри Пуанкаре́
(Jules Henri Poincaré)
1854-1912)

Типы устойчивости стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Ляпуно́в Алекса́ндр Миха́йлович (1857 – 1918) – выдающийся русский математик, создал теорию устойчивости состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Работал также в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей

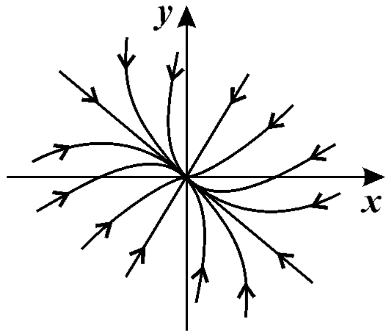
Типы поведения фазовых траекторий в окрестности стационарного состояния для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

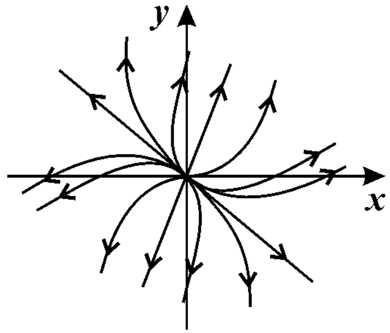
$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

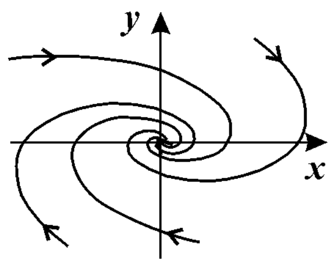
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$



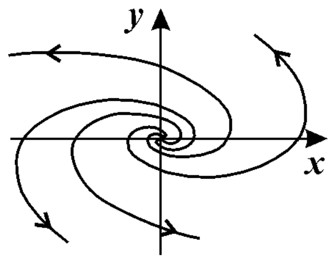
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



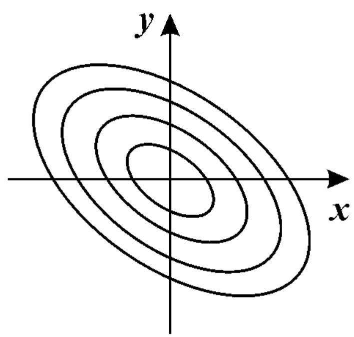
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



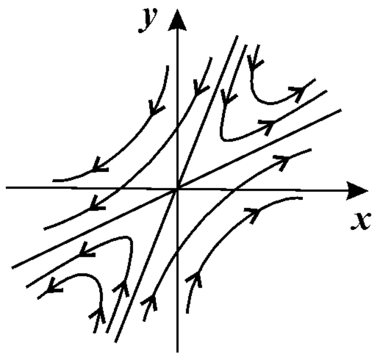
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)

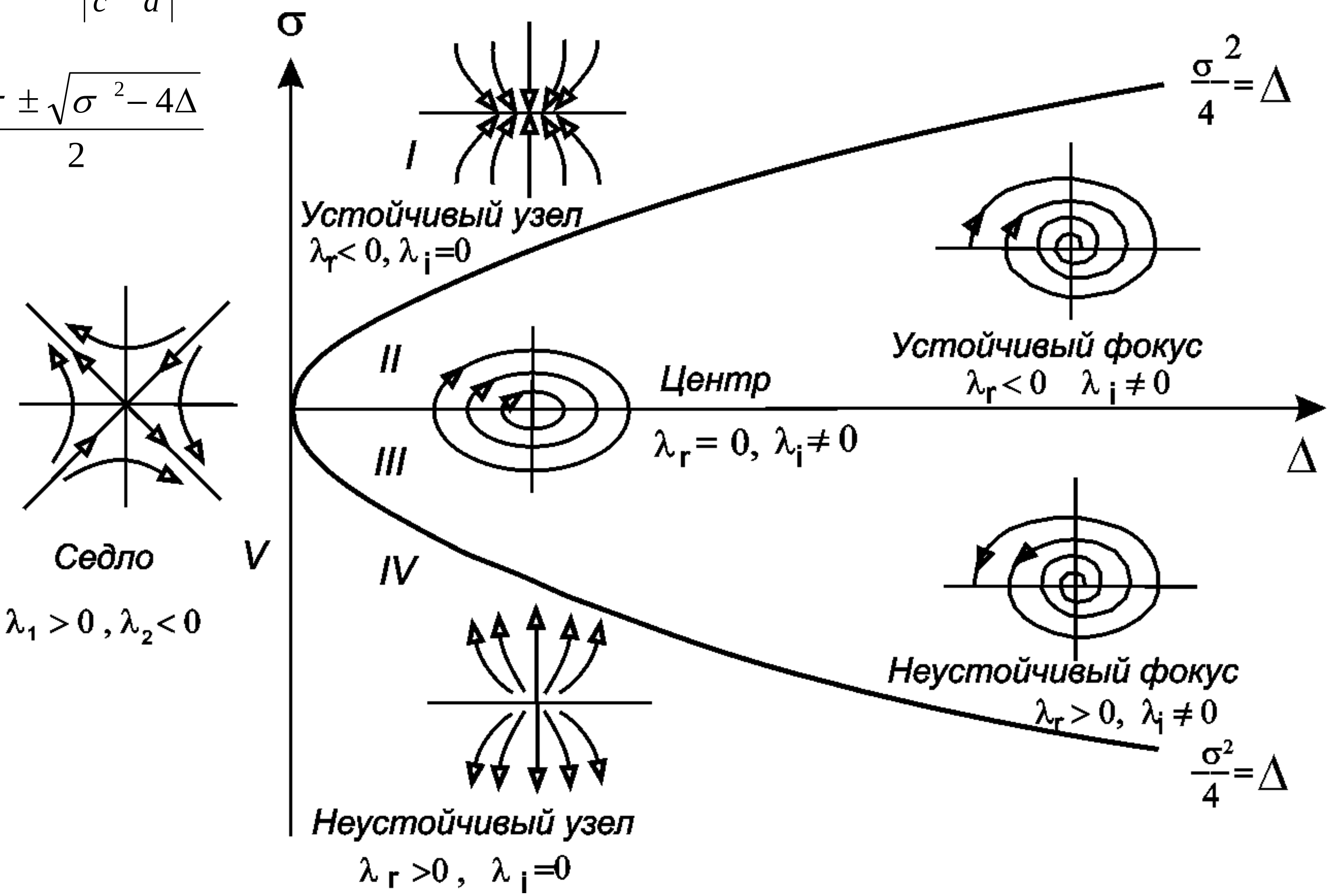


Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Бифуркацонная диаграмма

$$\sigma = -(a+d);\ \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\qquad \frac{dy}{dt}=Q(x,y).$$

$$x=\bar{x}+\xi,\qquad y=\bar{y}+\eta.$$

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt}=a\xi+b\eta,\qquad \frac{d\eta}{dt}=c\xi+d\eta.$$

$$a=P_x'(\bar{x},\bar{y}), b=P_y'(\bar{x},\bar{y}),$$

$$c=Q_x'(\bar{x},\bar{y}), d=Q_y'(\bar{x},\bar{y}).$$

Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. Elements of Physical Biology, 1925)

$$\longrightarrow A \xrightarrow{k_0} X \xrightarrow{k_1 \leftarrow} Y \xrightarrow{k_2} B$$

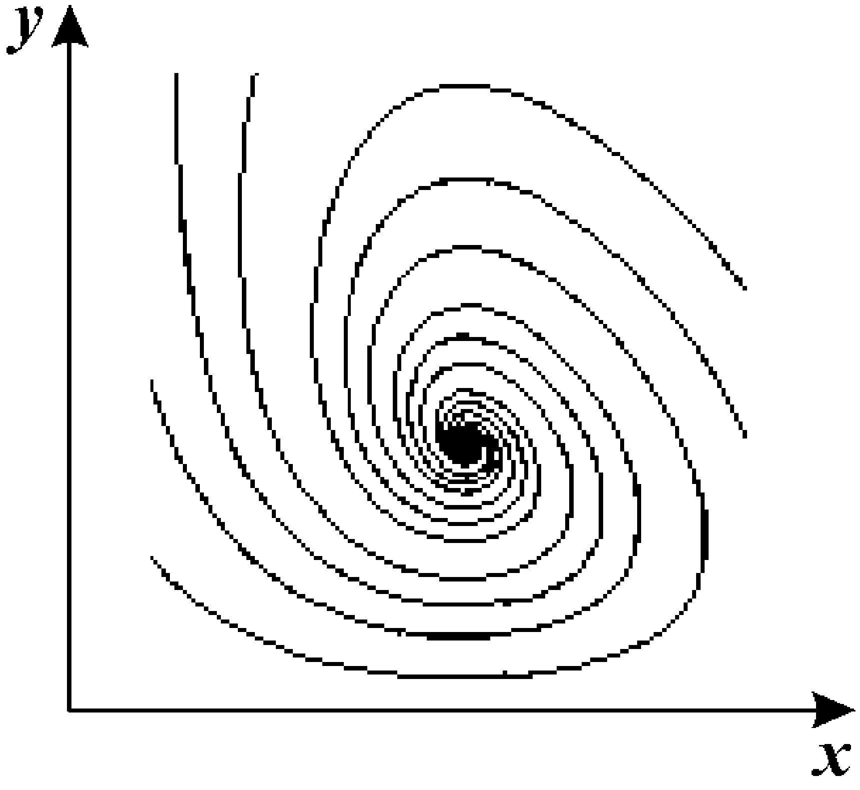
$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$

$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$

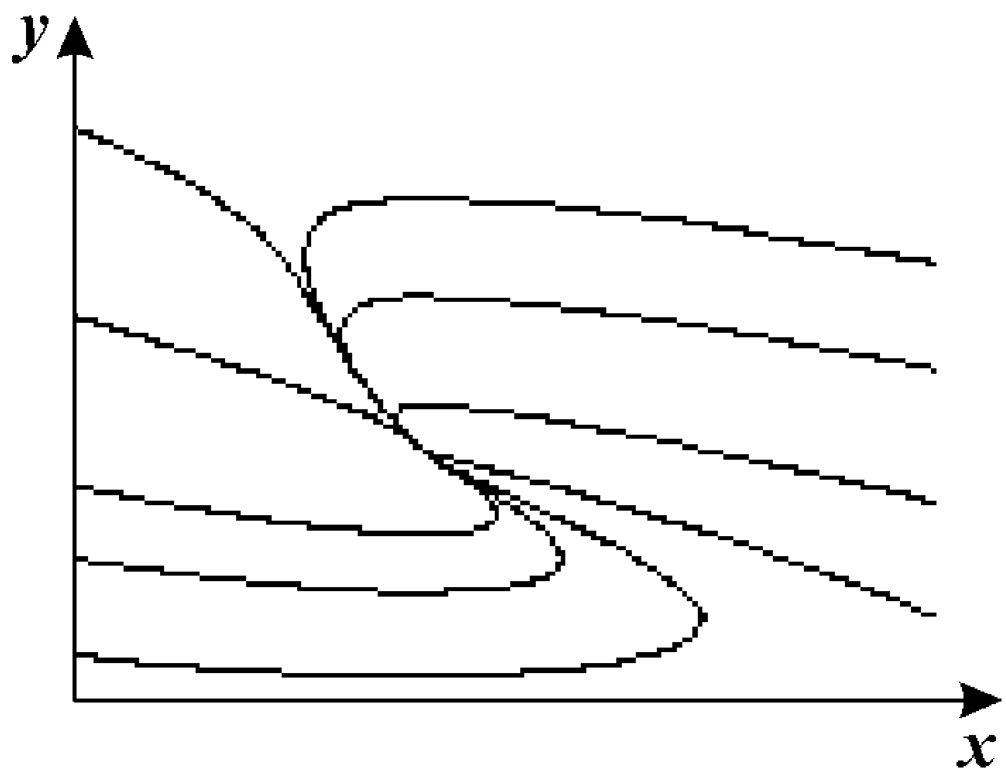
Лотка Альфред Джеймс (англ. *Alfred James Lotka*), 1880 –1949 – американский математик, физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

Фазовый портрет системы Лотки *а* – устойчивый фокус, *б* – устойчивый узел.



а

$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$



б

$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$

Модель Вольтерра

Vito Volterra

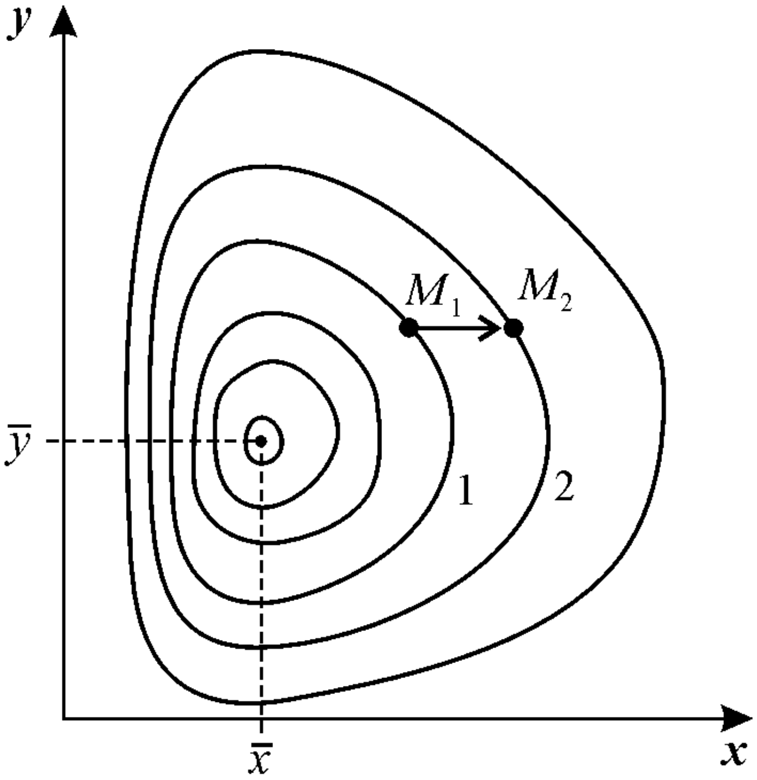
$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x).$$

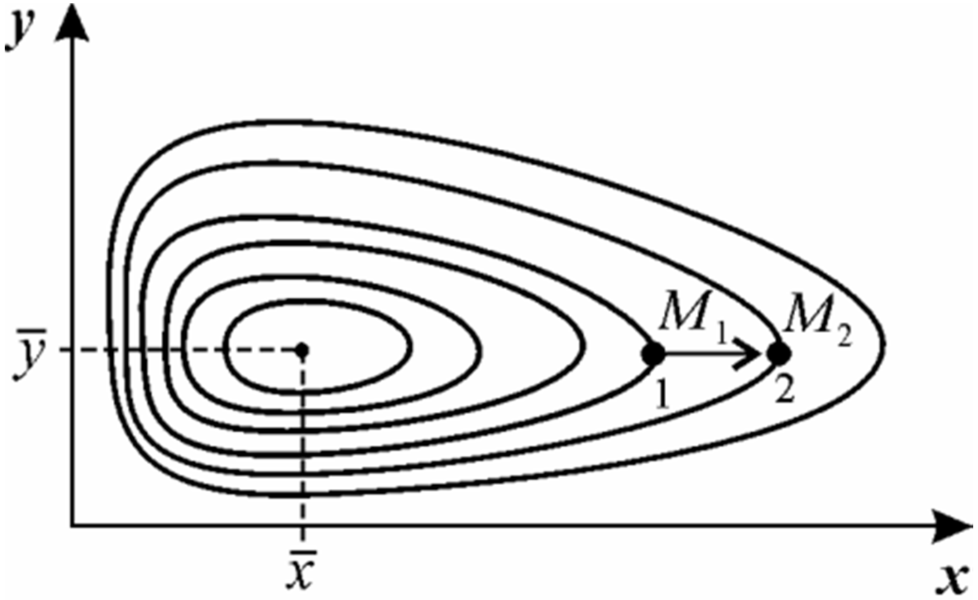
X – численность жертв
Y – численность хищников

Вольтерра Вито (1860 —1940) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

Фазовый портрет модели Вольтерра



а



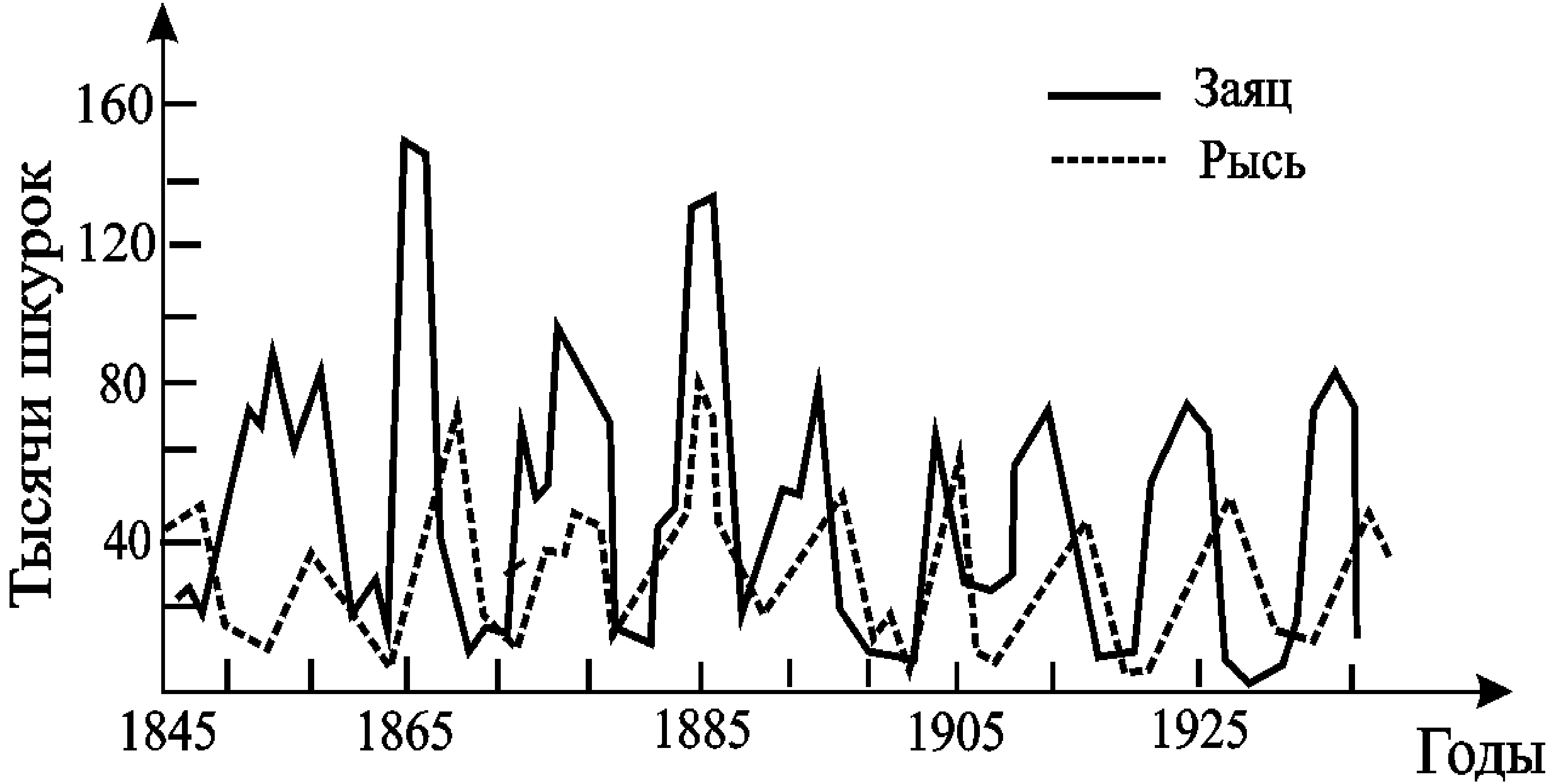
б

εx = 4, γxy = 0,3, εy = γyx = 0,4

εx =2, γxy = 0,3, εy = γyx = 0,4

Кривые численности зайца и рыси в Канаде

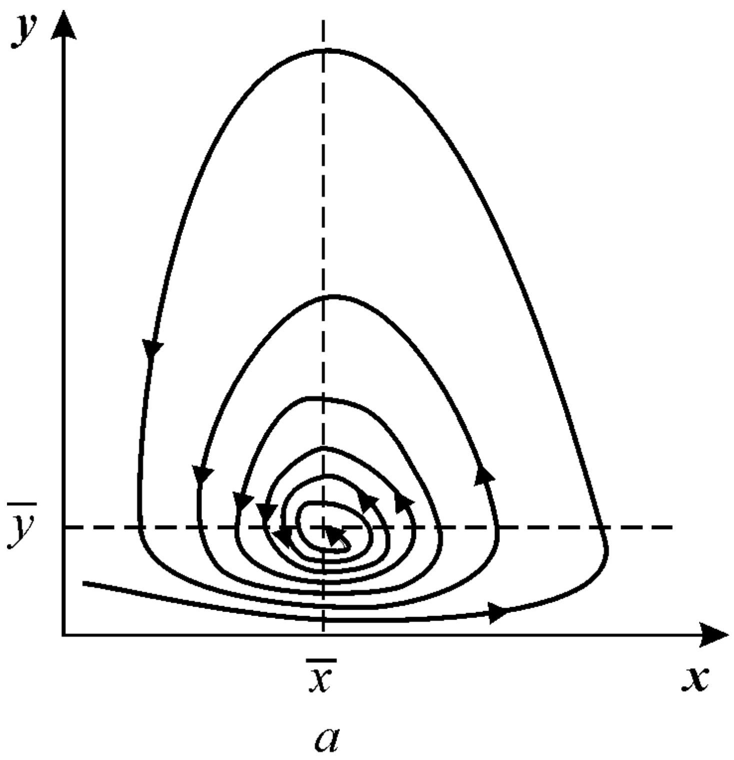
(по К. Вилли, В. Детье, 1974)



Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y - \delta_x x),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_y + \gamma_{yx} x - \delta_y y).$$

εx = 2,
γxy = 1,
δ*x*=1,
εy = 3,
γyx = 1,
δ*y*=1



εx = 2,
γxy = 18,
δ*x*=1,
εy = 3,
γyx = 5,
δ*y*=1