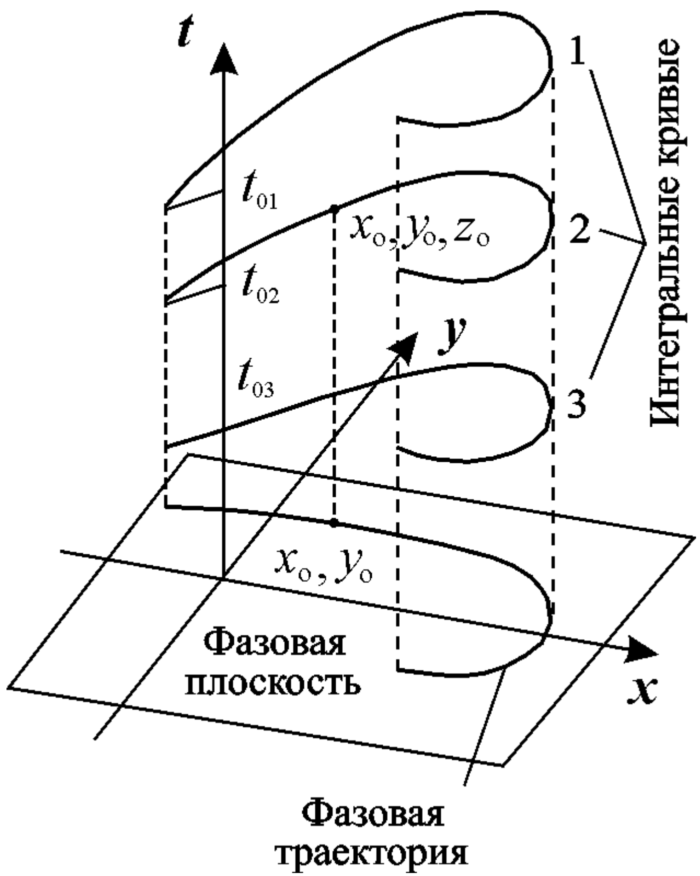
Фазовая плоскость

Качественное исследование

Анализ устойчивости стационарного состояния системы двух автономных дифференциальных уравнений

Траектории системы в пространстве (x,y,t)



Жюль Анри Пуанкаре́
(Jules Henri Poincaré)
1854-1912)

Типы устойчивости стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Ляпуно́в Алекса́ндр Миха́йлович (1857 – 1918) – выдающийся русский математик, создал теорию устойчивости состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Работал также в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей

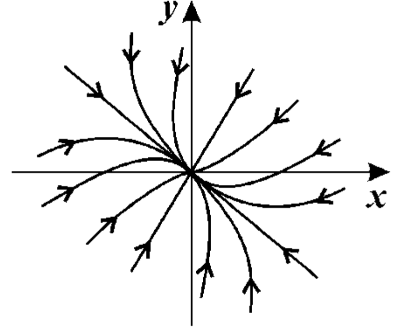
Типы поведения фазовых траекторий в окрестности стационарного состояния для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

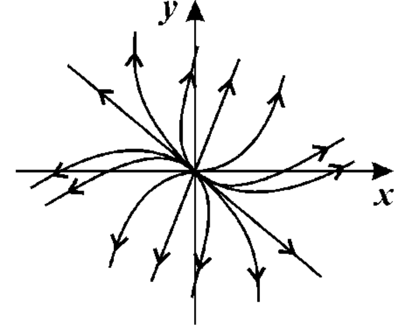
$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

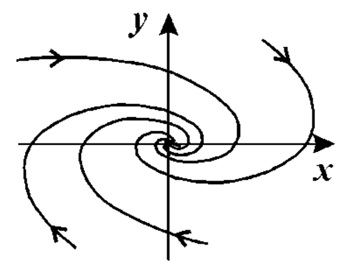
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$



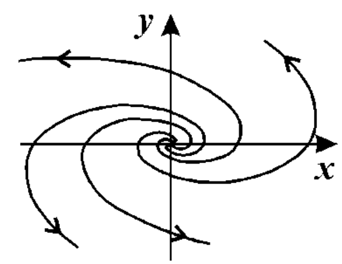
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



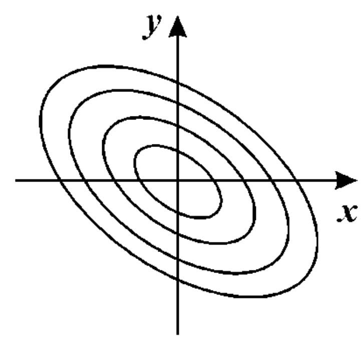
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



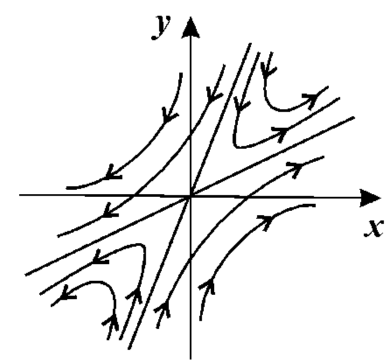
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)

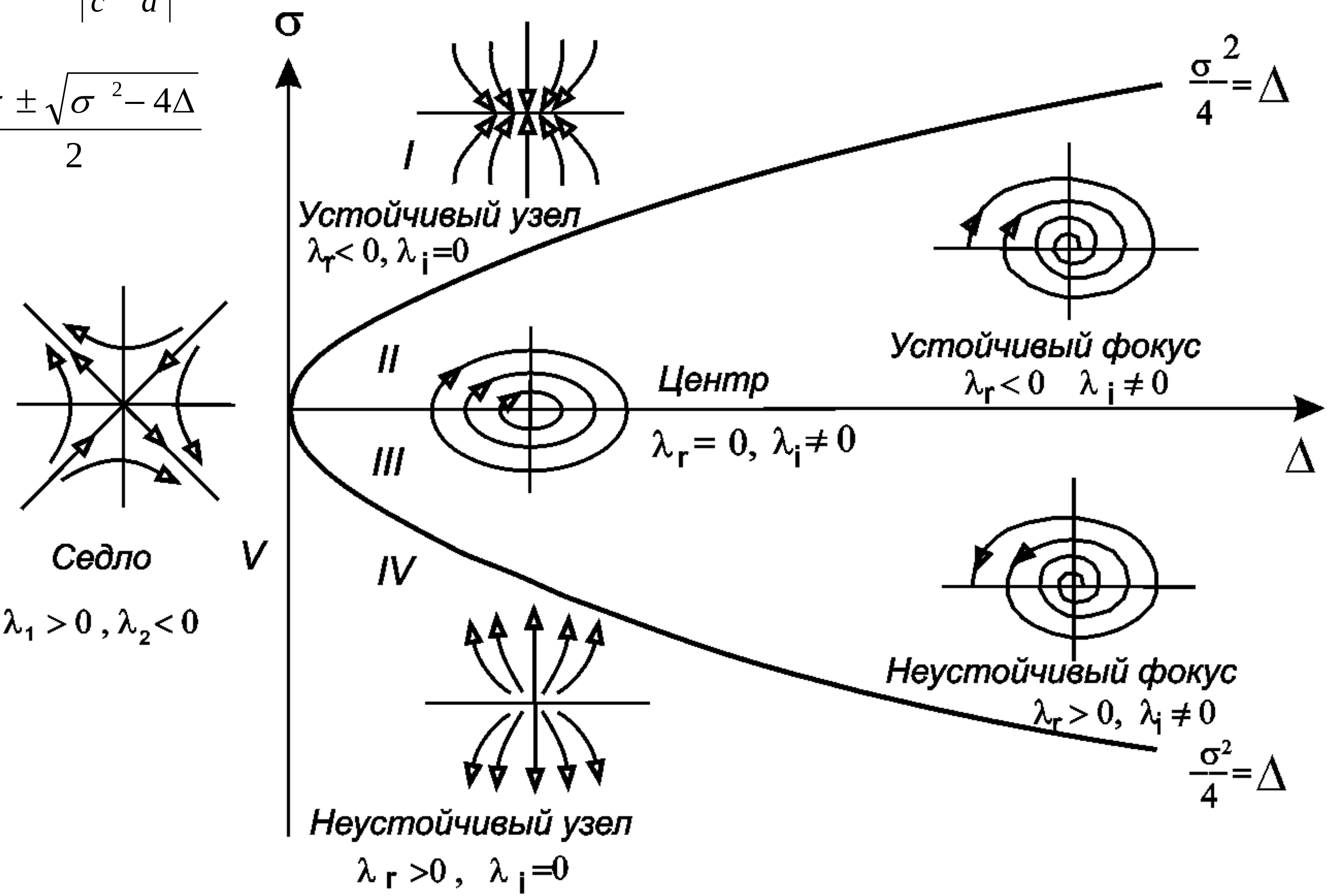


Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Бифуркацонная диаграмма

$$\sigma = -(a+d);\ \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\qquad x=\overline{x}+\xi,$$

$$\frac{dy}{dt}=Q(x,y).\qquad y=\overline{y}+\eta.$$

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt}=a\xi+b\eta,\qquad a=P_x{}'(\overline{x},\overline{y}),b=P_y{}'(\overline{x},\overline{y}),$$

$$\frac{d\eta}{dt}=c\xi+d\eta.\qquad c=Q_x{}'(\overline{x},\overline{y}),d=Q_y{}'(\overline{x},\overline{y}).$$